Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина
Высшая школа экономики и менеджмента

О. И. НИКОНОВ
С. В. КРУГЛИКОВ
М. А. МЕДВЕДЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

О. И. Никонов, С. В. Кругликов, М. А. Медведева

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Рекомендовано
методическим советом УрФУ для студентов,
обучающихся по направлениям подготовки
080500 «Бизнес-информатика»,
230700 «Прикладная информатика»,
080100 «Экономика»,
080200 «Менеджмент»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2015

УДК 004.942:330.4(075.8)
ББК 65в31я73
Н64

Рецензенты:

ведущ. науч. сотр. Ин-та математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН д-р физ.-мат. наук Б. И. Ананьев;
руководитель Центра развития и размещения производительных сил Ин-та экономики УрО РАН д-р техн. наук, проф. М. Б. Петров

Научный редактор — д-р физ.-мат. наук проф. А. А. Астафьев

Никонов, О. И.
Н64 Математическое моделирование и методы принятия решений : учеб. пособие / О. И. Никонов, С. В. Кругликов, М. А. Медведева. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. — 100 с.

ISBN 978-5-7996-1562-8

В учебном пособии рассматриваются элементы теории принятия решений, применимые к исследованию народно-хозяйственных систем, предприятий и организаций, формулируются представления современной теории рисков. Основное внимание уделяется экономическому и финансовому рискам, в частности, обсуждаются классические подходы к анализу риска, базирующиеся на теории Г. Марковица и Дж. Тобина, результаты У. Шарпа, С. Росса и других известных специалистов в области финансового анализа.

Учебное пособие предназначено для студентов экономических специальностей высших учебных заведений.

Библиогр.: 25 назв. Табл. 6. Рис. 12.

УДК 004.942:330.4(075.8)
ББК 65в31я73

ISBN 978-5-7996-1562-8

© Уральский федеральный университет, 2015

Предисловие

Настоящее пособие посвящено теории принятия решений в условиях риска и неопределенности. Разнообразие мнений о сущности риска объясняется, в частности, многоаспектностью этого явления. Риск — это сложное явление, имеющее множество несовпадающих, а иногда противоположных реальных оснований. При исследовании тех или иных задач важным фактором является процесс управления риском, один из элементов которого — количественный анализ рисковых ситуаций. Этот анализ предполагает численное определение как отдельных рисков, так и риска в целом. Вопросы измерения рисков обсуждались во многих работах [1]–[16].

В первой части пособия рассматриваются элементы теории принятия решений, применимые в основном к исследованию народно-хозяйственных систем, предприятий и организаций. Здесь приводятся основные понятия об экономико-математическом моделировании хозяйственных систем. Формулируются представления современной теории рисков, приводится их классификация. Рассматриваются задачи сетевого планирования, вопросы, связанные с применением экспертных оценок, и целый ряд других.

Во второй части пособия дается краткий обзор наиболее часто используемых количественных характеристик риска. Приводятся классические критерии оценки и показатели уровня риска, базирующиеся на теории вероятностей и теории игр, индексы и шкалы риска. При этом основное внимание уделяется экономическому и финансовому рискам, в частности, обсуждаются классические подходы к анализу риска, базирующиеся на теории Г. Марковица и Дж. Тобина, результаты У. Шарпа, С. Росса и других известных специалистов в области финансового анализа. Этот раздел базируется на работах [17]–[25].

Часть первая.
Принятие решений в управлении народно-хозяйственными и производственными системами

1. Понятие об экономико-математическом моделировании хозяйственных систем

Предметом экономико-математического моделирования является комплекс математических методов и представлений таких предметных областей, как экономика, математическая статистика, теория управления, теория игр и системный анализ, предназначенный для анализа процессов объектов и явлений реального мира, в которых проявляются эффекты неопределенности.

Для дальнейшего обсуждения удобно выделить следующие этапы процесса управления экономическими объектами и системами:

а) анализ ситуаций и разработка вариантов решения;
б) принятие управленческого решения как выбор из одной возможных альтернатив в качестве оптимальной;
в) исполнение принятого решения;
г) контроль над соответствием достигнутого результата и ранее поставленной цели.

Основными инструментами организации процесса управления экономической деятельностью являются различные формы бизнес-планирования.

Ситуационный подход к процессу моделирования конкретной системы предполагает возможность выделения следующих элементов описания:

Среда		
Ситуация	Организация	Внешняя среда
Система		Внутренняя
	Подсистема	среда

Термин *среда* объединяет все факторы и явления, которые оказывают влияние на совместно рассматриваемые системы, сопоставимые с основной, но не поддаются коррекции и регулированию на выбранном уровне рассмотрения. *Ситуация* объединяет комплекс всех совместно рассматриваемых, взаимодействующих систем, факторов и явлений, которые не только влияют на эти системы, но поддаются коррекции и регулированию и изменению. *Организация* — это комплекс систем, взаимное поведение которых ограничено существованием связей, сложившихся в определенных ситуациях, но остающихся неизменными. При этом каждый из элементов организации сохраняет независимость и свободу принятия решений, в частности, о выходе из организации.

Бизнес-планирование состоит в разработке модели поведения системы в существующих условиях среды, ситуации и организации, обеспечивающего достижение конкретной цели за заданный срок.

Бизнес-план может включать комплекс мероприятий по изменению состава (перечня подсистем), по изменению ситуации и организации.

Под бизнес-планом понимается структурированное, до определенной степени стандартизованное описание бизнес-идеи, представляющей собой программу поведения и развития системы для достижения четко сформулированной цели.

Целесообразность разработки бизнес-плана может определяться следующими обстоятельствами:

1) недостатком средств для реализации проектов развития, необходимостью привлечения инвестиций в бизнес под конкретный проект;
2) структурированным представлением о функционировании предприятия в конкретной рыночной нише с целью спрогнозировать возможные риски и опасности, выработкой вариантов реакции;
3) документом рекламного плана, представляющим общее описание перспектив ведения бизнеса, как свидетельство цивилизованности предприятия и уровня развития менеджмента;
4) способом контроля над внутренними взаимосвязями и организацией управления на конкретном предприятии. Согласованием с идеей бюджетирования как непрерывного сопоставления притока и оттока капитала;
5) определением уровня финансовой устойчивости предприятия.

Обобщенно процесс бизнес-планирования можно представить как распределение поступающего (неравномерно) экономического ресурса в группе участников, в которой каждый преследует свои интересы, обладая собственными ограниченными возможностями. С этой точки зрения бизнес-планирование обеспечивает согласование и синхронизацию действий участников на четырех базовых этапах:

1) инвестиционном — осуществление капитальных затрат и подготовка производственной базы для реализации идеи;
2) финансовом — обеспечение поступления кредитных ресурсов (разной степени срочности), позволяющее перекрыть текущие потребности за счет будущих поступлений;

3) рыночной реализации бизнес-идеи — функционирование построенных мощностей с выводом на полную мощность;
4) ликвидационном — завершение проекта, переход на подготовку следующего.

Финансовый план как основная составная часть бизнес-плана представляет собой модель расчетов, четко отражающую реализацию того базового варианта поведения системы (хозяйствующего субъекта), который считается наиболее приемлемым для реализации данной бизнес-идеи. Такая расчетная модель позволяет учесть и проанализировать два основных фактора риска, обобщенно представляющих негативные следствия сочетания различных причин — это задержка сроков и превышение расходов (снижение доходов).

В разделе «анализ риска» бизнес-плана содержится описание тех параметров и факторов колебания, которые могут существенно влиять на выбранный базовый вариант. Мера влияния изменения факторов на результаты проекта определяется при анализе чувствительности. Выделение опасных зон позволяет доработать управленческое решение для исключения или сглаживания последствий рисков.

2. Основные представления современной теории рисков. Классификация рисков

Риск — ситуация или сочетание факторов среды и ситуации, которые оказывают (могут оказать) неблагоприятное влияние на бизнес и (или) экономические проекты, в частности, неполучение запланированной прибыли, превышение затрат, задержку сроков и иные потери. При этом можно предполагать относительную устойчивость внешних условий, что позволяет опираться на ранее накопленный опыт, статистическую информацию и, следовательно, применять методы и понятия теории вероятностей.

При количественной оценке риск измеряется вероятностью наступления неблагоприятного события или ее количественными характеристиками.

С содержательной точки зрения выделяют две базовые концепции понятия «риск»:

1) предпринимательский риск (ПР);
2) финансовый (ФР).

Предпринимательский риск охватывает понятия, связанные с неустойчивостью функционирования конкретного бизнеса в конкретной рыночной нише. Предпринимательский риск связан с понятием операционного рычага.

Финансовый риск — неустойчивость, связанная с финансированием бизнеса, т. е. обеспечением инвестиций и покрытием кассовых разрывов.

На сегодняшний день не существует единой общепринятой классификации рисков в экономической деятельности, т. к. разнообразие видов рыночной деятельности и рассматриваемых объектов требует отдельного рассмотрения для каждого случая (табл. 1). Риски взаимосвязаны и могут влиять друг на друга.

Выделяют классификацию рисков по последствиям:

1) допустимые;
2) критические;
3) катастрофические.

Допустимый риск — это риск потери ожидаемой прибыли; смысл экономической деятельности сохраняется. Критические риски предполагают возможность потери всей или части выручки вплоть до потери средств, вложенных в данный проект. Катастрофические риски — возникновение опасности потерять имущество фирмы для ликвидации неплатежеспособности предприятия: угрозы жизни людей, экономические бедствия.

В экономической деятельности всегда присутствует неопределенность, и, более того, одно из ведущих течений экономической теории трактует неопределенность как единственную естественную причину для возникновения прибыли в бизнесе.

Таблица 1

Характеристика рисков

Термин	Рейтинг банков	Рейтинг предприятий	Частные виды	Содержательный смысл
Кредитный риск	1	3	Риски погашения, невозврата основной суммы кредита, риск заемщика	Участник не исполняет свои обязательства в полной мере либо на требуемую дату, либо на любое время после указанной даты. Для предприятий связан с дебиторской задолженностью и работой на рынке ценных бумаг
Рыночный риск	2	2	Процентный, валютный	Риск потерь из-за изменения рыночных цен, процентных ставок, курсов валют, коррекции параметров рынка с их изменчивостью. Для предприятий сюда относятся риски S и D, риски потери ликвидности
Потеря ликвидности	3	Незначимый	–	Фирма в какой-либо момент не может расплатиться по своим обязательствам, имеющимся в наличии капиталом
Операционный риск (организационный)	4	1	Ошибки, обман, аварии, стихийное бедствие	Все, что связано с ошибками и обманом в системах управления и контроля. Особенно большие проблемы в системах внутреннего контроля
Юридический риск	5	4	Ошибки оформления. Изменение законодательства	Случай, когда в соответствии с действующим законодательством клиент не обязан выполнять свои обязательства по заключенной сделке. Законодательство либо было не учтено совсем, либо изменилось, а эта возможность не предусмотрена в договоре.

Окончание табл. 1

Термин	Рейтинг банков	Рейтинг предприятий	Частные виды	Содержательный смысл
Юридический риск	5	4	Ошибки оформления. Изменение законодательства	Документация по договору некорректно составлена либо не учитывает особенности законодательства страны пребывания
Технико-производственный	—	5	Ошибки производственного персонала. Аварии. Катастрофы	Ошибки в проектировании; недостатки технологии и неправильный выбор оборудования; ошибочное определение мощности; нехватка квалифицированной рабочей силы; внеплановые остановы оборудования или прерывания технологического цикла предприятия из-за вынужденной переналадки оборудования (например, вследствие неожиданного изменения качественных параметров сырья); перебои энергоснабжения; удлинение по сравнению с плановыми сроков ремонта оборудования; аварии вспомогательных систем (вентиляционных устройств, систем водо- и теплоснабжения); срыв поставок сырья, стройматериалов, комплектующих; срыв сроков строительных работ (суб-) подрядчиками

3. Неопределенность в экономических системах и особенности российской экономики с точки зрения состояния неопределенностей

Можно выделить три основные градации уровня неопределенности:

1) собственная неопределенность — фирма выходит на новый неизвестный рынок, не обладая опытом подобной деятельности, начинает сотрудничать с новым партнером, о котором нет надежной устойчивой информации. В расчетах и количественном моделировании финансовых результатов бизнес-плана применяется гарантированный подход — ориентация на лучший способ деятельности в наихудших условиях. Невозможность оценки реальной опасности потерь требует учета предельно возможных значений факторов риска, что ведет к отказу от части возможной прибыли и снижает эффективность работы компании;

2) ситуация риска — фирма предполагает существенные вложения в области деятельности либо уже освоенной, либо хорошо документированной. Существует история и опыт деятельности. Возможные колебания рынка, угрозы и внутренние проблемы (табл. 1) в определенной степени становятся предсказуемы на основе частотных характеристик. При количественном моделировании применяется вероятностный подход на основе статистических показателей и ориентация на ожидаемый результат;

3) конфликт — фирма начинает действовать в условиях наличия открытых антагонистических интересов и целенаправленного противодействия. При количественном моделировании применяются игровые подходы и ориентация на определение седловой точки в чистых или смешанных стратегиях.

Можно утверждать, что для современной российской экономики с точки зрения состояния неопределенностей положение на рынке начинает приобретать устойчивость.

Однако для российской экономики характерны следующие особенности:

1) существенный объем внеэкономических факторов возрастает с усилением государственного регулирования;
2) большое значение имеют субъективные личностные факторы лиц, принимающих решения;
3) имеет место слабая обоснованность вероятностных подходов.

Отрицательными факторами Российской экономики с точки зрения применимости количественного анализа рисков являются следующие:

1) недостаточно оснований для эффективного применения классической теории управления как предметной области науки. Теория управления — это обобщенная, осмысленная, положительная управленческая практика. Осмысление практики в настоящее время — предмет активной работы исследователей;
2) недостаток развитой информационной инфраструктуры, т. е. нехватка статистических данных для численного анализа факторов риска;
3) недостаток осознанной культуры предпринимательства;
4) возможность получать прибыль безотносительно к рыночной ситуации и внедрению эффективного менеджмента.

4. Количественные оценки экономического риска в условиях неопределенности

Пусть $H = H(x)$, $x \in R^n$, где H — результирующий показатель; x — фактор. В таком случае в качестве количественных оценок экономического риска могут быть взяты следующие величины:

1) статистическая характеристика ожидаемого результата
$$\overline{H} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} H_i;$$
2) дисперсия для значения результативного показателя;
3) среднеквадратичное отклонение δ;
4) коэффициент вариации $V = \dfrac{\delta}{\overline{\overline{H}}}$;
5) распределение вероятности для $H(x)$;
6) вероятность некоторого конкретного события $P\,(H^{*} < H < H^{**})$;
7) теоретический коэффициент риска
$$\bar{r} = \frac{H_{\text{п}}}{H_{\text{в}}},\ \bar{r} \in (0; \infty).$$

Недостатки теоретического коэффициента риска:

— ненормированность значения $(0; \infty)$ осложняет применение в процедурах принятия решения. Коэффициент пригоден при сравнении нескольких проектов. Однако для одного проекта только характеризует тенденцию. Возможный выход — нормирование значений [0, 1];
— не учитывает субъективные факторы, как особенности лиц, принимающих решения, так и ситуационные;
— достаточно сложно сформировать представление результирующего показателя как функцию одного или нескольких факторов, что особенно характерно для производственных и экономических задач, в которых приходится учитывать изменчивость факторов макро- и микросреды;

8) показатели риска, применяемые в страховом деле,
$$R_{\text{ст}} = H_{\text{п}} p_{\text{п}},$$
где $p_{\text{п}}$ — вероятность потерь;

9) риск банкротства

$$r_в = \frac{H_{п\ max}}{k},$$

где $H_{п\ max}$ — максимально возможные потери; k — величина собственных средств (капитал);

10) обобщающий показатель риска

$$r_0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} H_{п\ max_i}}{k} = \sum_{i=1}^{N} r_{вi}$$

применяется, когда выделены и количественно оценены риски, составляющие суммарный риск проекта в целом:

$$R_0 = \sum_{i=1}^{N} H_{Пi} p_i = \sum_{i=1}^{N} R_{ст\ i}.$$

Отдельные риски выделены и прошли экспертную оценку, установлены веса и значимость факторов:

$$R_{0Э} = \sum_{j=1}^{N} R_j g_j, \qquad R_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n_j} R_{ij} g_{ij},$$

$$0 \le R_{ij} \le m, \quad 0 \le g_{ij} \le 1, \quad \sum_{i=1}^{n_j} g_{ij} = 1,$$

где $R_{0Э}$ — обобщенная оценка риска, полученная экспертным путем; R_j — балльная оценка j-го риска (влияние); g_j — вес (доля) j-го риска (иногда трактуется как вероятность j-го риска); N — количество рассматриваемых отдельных рисков; m — максимальное значение в шкале баллов; n_j — количество факторов, оцениваемых при моделировании j-го риска (может быть своим для каждого риска); R_{ij} — балльная оценка i-го фактора в j-м виде риска; g_{ij} — вес i-го фактора в j-м виде риска.

Для содержательной интерпретации числовых показателей оценки рисков применяются эмпирические шкалы, которые являются ориентировочными, т. к. в значительной степени опираются на субъективное восприятие (табл. 2).

Таблица 2

Интерпретации числовых показателей оценки рисков

№	Значение показателя	Термин
По вероятности нежелательного исхода		
	Р — величина риска	
1	$P \in [0; 0{,}1]$	Минимальный риск
2	$P \in [0{,}1; 0{,}3]$	Малый риск
3	$P \in [0{,}3; 0{,}4]$	Средний риск
4	$P \in [0{,}4; 0{,}6]$	Высокий риск
5	$P \in [0{,}6; 0{,}8]$	Максимальный риск
6	$P \in [0{,}8; 1]$	Критический
По коэффициенту вариации		
	$\upsilon = \frac{\sigma}{x}$	
1	$\upsilon < 0{,}1$	Слабая степень риска
2	$0{,}1 \le \upsilon \le 0{,}25$	Умеренная степень
3	$0{,}25 < \upsilon$	Высокая степень
Для риска банкротства		
1	Менее 25 %	Приемлемый
2	От 25 до 50 %	Допустимый
3	От 50 до 75 %	Критический
4	От 75 до 100 %	Катастрофический
По уровню возможных потерь		
1	Потери части чистой прибыли	Приемлемый (минимальный)
2	Потери большей чистой прибыли, но меньше расчетной	Допустимый (повышенный)
3	Потери не только расчетной прибыли, но части инвестиций в проект	Критический (критический)
4	Потери угрожают существованию фирмы либо сопряжены с гибелью людей	Катастрофический (недопустимый)

5. Анализ рисков с точки зрения времени. Задачи сетевого планирования

Анализ рисков нарушения сроков реализации проекта, особенно в период инвестиционного этапа, возможен за счет учета неопределенности времени выполнения работ в задачах календарного планирования. Структура выполнения любого бизнес-процесса описывается и анализируется с учетом необходимости его выполнения в реальном времени, т. е. с привязкой к календарным данным. Прикладным методом календарного планирования является задача сетевого планирования управления, в которой основным показателем качества является время выполнения проекта.

Реализация любого бизнес-проекта как сложного и (многокомпонентного) и многосвязного комплекса этапов требует обеспечения согласованности по времени, затратам финансовых средств, обеспеченности и равномерности использования технических и людских ресурсов в условиях неопределенности и риска. Соответствие терминологии, применяемой в бизнес-планировании, сетевом планировании и управлении (СПУ), математике приведено в табл. 3.

Инструментом для решения этих задач в методологии сетевого планирования управления являются сетевые модели (табл. 3).

Сеть — частный вид графа, в котором возможны перекрестные связи между вершинами разных уровней.

Этап — выделенный комплекс работ, который можно рассматривать как относительно самостоятельный проект меньшего уровня.

Работа в сетевом планировании характеризуется конечным перечнем свойств (цена, продолжительность, мера риска, потребность в ресурсах по продолжительности выполнения).

Таблица 3

Соответствие терминологии, применяемой в бизнес-планировании, сетевом планировании и управлении (СПУ), математике

Термины календарного планирования	Термины СПУ	Термины теории графов, теории вероятностей
Проект	Расписание (сетевая модель)	Сеть
Этап	Задача (работа)	Вершина (дуга)
Начало, завершение этапа	Событие	Дуга (вершина)
Продолжительность этапа	Продолжительность работы	Длина дуги
Материальные технические ресурсы (наличие и дефициты)	Ресурс	Свойства
Возможности экономии времени (наличие и дефициты)	Резерв	Свойства

Используется двоякое исполнение сетевой модели в форме вершинного и стрелочного графов. Для вершинного графа работа изображается вершиной, а для стрелочного — дугой.

Ресурс в сетевом планировании и управлении однородное дискретно изменяемое ограниченное — взаимозаменяемые единицы техники, оборудования, людей и специалистов.

Резерв — время, на которое можно задержать начало выполнения конкретной работы либо увеличить ее продолжительность без задержки выполнения всего проекта.

Основные задачи сетевого планирования следующие:

1) зная продолжительность и выполнение отдельных всех этапов выполнения, определить срок завершения всего проекта;
2) учесть возможность параллельного выполнения различных этапов и, следовательно, выделения слабых мест — «критический путь»;
3) определить стоимостные характеристики и возможности экономии денег за счет ускорения или замедления выполнения отдельных работ;

4) определить режим использования ресурсов и обеспечить оптимальный режим за счет использования резервов времени;
5) учесть риск и неопределенности сроков выполнения каждой из работ и в целом всего проекта.

Алгоритм составления сетевой модели, позволяющей описать инвестиционный этап реализации бизнес-плана, состоит в следующем:

1) на основании выделенных этапов проекта составляется перечень работ (необязательно упорядоченный). Удобно обозначать работы заглавными латинскими буквами. Их перечень может во время работы изменяться;
2) для каждой из работ определяются непосредственно ей предшествующие, т. е. те, которые должны быть выполнены непосредственно перед началом именно этой работы;
3) для каждой из работ определяется продолжительность, перечень и потребности в используемых ресурсах, стоимостные характеристики и неопределенности во времени выполнения работ;
4) составляется стрелочный (либо вершинный) граф. Проверяются свойства сетевой модели — ориентированность, направленность, связанность, отсутствие циклов.

При обнаружении проблем следует возвратиться на первый или второй этап.

Два основных предположения сетевого планирования:

1) каждая из работ должна быть выполнена, но ее нельзя начинать, пока не произойдет событие, за которым она следует;
2) каждое из событий должно состояться, но ни одно из них не произойдет, пока не будут завершены работы, в нем заканчивающиеся.

Задача оптимального использования ресурсов в сетевом планировании — одна из наиболее трудноформируемых и требующих, как правило, комбинаторного перебора. Не удается указать простых и наглядных общих алгоритмов, особенно в связи с различными, зачастую противоречивыми понятиями оптимальности использования ресурсов. Возможные варианты:

1) снижение пиковой потребности (снижение максимальной потребности в ресурсе);
2) наиболее равномерная загрузка ресурсов;
3) монотонное изменение потребностей в ресурсе.

Для больших проектов практически единственным способом решения является эмпирический подбор на основе анализа диаграммы Гантта.

Составленная сетевая модель позволяет количественно описать риски и неопределенности инвестиционного этапа реализации бизнес-плана. Вся совокупность рискованных факторов сводится к их влиянию на продолжительность исполнения проекта. При этом используется два основных метода:

1) аналитическое моделирование на основе закона больших чисел;
2) имитационное моделирование. Причина использования имитационного моделирования состоит в том, что необязательно удается доказать и обоснованно представить вид итогового распределения случайной величины, описывающей продолжительность исполнения проекта в целом, т. к. есть возможность изменить состав критического пути.

Основным показателем, характеризующим рискованность ситуации сетевой модели, является вероятность отклонения ожидаемого срока окончания проекта от реального.

Аналитическое моделирование на основе закона больших чисел влияния рисков на продолжительность исполнения проекта сводится к следующему.

По всем работам, относительно которых существуют риски срыва сроков, значению продолжительности выполнения работы t_x ставится в соответствие случайная величина ζ_x. При этом предполагается, что ζ_x имеет β-распределение с параметрами $t_{\min}$, $t_{\max}$, $t_{\text{вер}}$. В таком случае количественные характеристики срока исполнения работы и возможные отклонения описываются величинами:

$$t_x = \frac{t_{\min} + 4t_{\text{вер}} + t_{\max}}{6};$$

$$\delta_{\text{ч}}^2 = \frac{(t_{\max} - t_{\min})^2}{6};$$

$$t_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(\zeta_x)dx = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} xf(\zeta_x)dx .$$

Ожидаемый срок выполнения проекта в целом $T_{\text{пр}} = \sum_{x_{\text{кр}}} t_{x_{\text{кр}}}$ – СВ.

$T_{\text{пр}}$ соответствует $\zeta = \sum_{(x_{\text{кр}})} \zeta_{x_{\text{кр}}}$ случайной величине «продолжительность выполнения», значения которой вычисляются только по критическим работам

$$T_{\text{пр}} = \sum_{(x_{\text{кр}})} E\left\{\zeta_{x_{\text{кр}}}\right\}.$$

$$\delta_{\text{кр}} = \sum_{(x_{\text{кр}})} \delta_{x_{\text{кр}}}^2 .$$

Возможные измерители риска при одном и том же содержательном смысле базового показателя следующие:

1) вероятность наступления нежелательного события $(P(\varsigma_{\text{пр}}) > T^*) = \alpha$;
2) превышение заданного значения математического ожидания. Такая задача возникает, как правило, если распределение случайной величины содержит параметр либо если исследование многомерной зависимости $E(\zeta_{\text{пр}}) > T^{**}$;

3) $\sigma\left(\varsigma_{\text{пр}}\right) \to \min$ (среднеквадратичное отклонение в качестве минимизирования показателя).

Замечание. Использование имитационных методов не способно в принципе изменить ситуацию с исследованием рисков, но переводит сложности в другую плоскость. Все равно остаются вопросы определения исходных статистических свойств базовых факторов, выбора измерителя для ситуации риска и интерпретации результатов. Дополнительно возникают проблемы в проверке правильности написания программ, устойчивости вычислительных методов, зато, если программа есть, то мы не ограничены.

Алгоритм имитационного исследования ситуации риска таков:

1) определение исходной экономико-математической модели (описание ситуации в детерминированном случае);
2) определение основных факторов, изменение которых может повлиять на качественное состояние модели. Выделяются параметры, изменение которых описывается случайными величинами;
3) определение основных качественных показателей модели, т. е. переменных, в терминах которых определяются результаты моделирования;
4) на основе статистического исследования определение распределения случайных факторов (рискованных факторов);
5) составление программной модели, обеспечивающей моделирование значений факторов, пересчет по ним итоговых показателей и определение характеристик, описывающих рискованную ситуацию. Характеристик может быть достаточно много, любая из них показывает количественное значение, связанное с вопросом о рискованности ситуации;
6) организация работы в цикле и накопление значений результирующих показателей и характеристик рискованной ситуации;

7) определение меры устойчивости полученных результатов и характеристик при увеличении количества просчетов;
8) содержательная интерпретация полученных результатов. Вывод о рискованности ситуации в целом.

$t_x \sim \varsigma_x$ и $F_{cm}(\varsigma_x)$,

$$T_{\text{ожид}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_{\text{пр}\,i}.$$

6. Применение экспертных оценок рисков для учета слабоформализуемых факторов и оценки субъективной вероятности. Проблемы и возможности

Одним из возможных источников информации о вероятностном распределении факторов риска являются экспертные оценки, что предполагает использование опыта, наработанного отдельными высококлассными специалистами для усовершенствования стандарта технологий, либо выделение существенных факторов в рисковых ситуациях.

Технология построения экспертных оценок риска предполагает привлечение групп экспертов для снижения влияния субъективных факторов и особенностей, связанных с индивидуальным опытом. Возможны различные формы организации работы:

1) коллективное обсуждение с последующими оценками или комментариями;
2) коллективное обсуждение без оценок и комментариев;
3) коллективное обсуждение с индивидуальным формированием оценок и комментариев с возможным последовательным их пересмотром при анализе и обобщении результатов, полученных в ходе работы других экспертов.

Цели выставления индивидуальных оценок и проведения коллективных опросов, как правило, связаны с прогнозированием будущего развития событий, оценкой ранее состоявшегося прошлого опыта, выделением наиболее возможных источников риска и причин возникновения риска, получением количественных оценок влияния факторов риска.

Общая схема процедура экспертной оценки включает в себя следующие этапы:

1) подбор экспертов и формирование экспертной группы осуществляется с учетом качества, количества участников группы, специализации экспертов, цели экспертизы и их соотношения с возможными целями и интересами экспертов;
2) при формировании вопросов и составлении анкеты учитываются удобства, скорость заполнения, конфиденциальность (анонимность) и режим использования анкеты в будущем;
3) при работе с экспертами проводится и устанавливается порядок уточнения модели объекта, уточняется терминология анкеты; определяется порядок анкетирования (групповой и индивидуальный), порядок уточнения и обработки индивидуальных оценок экспертов;
4) формируются правила определения итоговой суммарной оценки на основании оценок, полученных из индивидуальных анкет экспертов.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{m} r_i}{m} \quad \text{или} \quad r = \frac{\sum_{i=1}^{m} r_i h_i}{\sum_{i=1}^{m} h_i},$$

где h_i — показатель надежности работы i-го эксперта, может быть вероятностью того, что i-й эксперт дал верную оценку;

5) для упорядочения рисков применяются методы классификации, ранжирования, непосредственные оценки последовательного и парного сравнений;
6) уточняется и корректируется итоговое решение по результатам экспертизы, порядок его принятия;
7) анализируется согласованность действий экспертов, обрабатываются результаты действий группы экспертов в целом, определяется коэффициент конкордации *w*,

$$W = \frac{\sigma^2_{\text{факт}}}{\sigma^2_{\max}},$$

где $\sigma^2_{\text{факт}}$ — дисперсия суммарных оценок группой экспертов по фактическому результату опроса; $\sigma^2_{\max}$ — дисперсия суммарных оценок в случае максимально возможного согласования мнений экспертов.

Пример. Допустим, группа из четырех экспертов оценивает сравнительную важность пяти рисков. Полученные результаты приведены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты оценки рисков

Эксперт	Риски				
	1	2	3	4	5
1	2	1	5	3	4
2	3	2	4	1	5
3	1	2	4	3	5
4	2	1	3	4	5
$R_{\max}$	**2**	**1**	**4**	**3**	**5**
$4R_{\max}$	8	4	16	12	20
$R_{\text{факт}}$	8	6	16	11	19

7. Финансовый риск-менеджмент в деятельности предприятия

Вопросы анализа рискованности с точки зрения финансовых показателей (финансовых операций) основаны на применении следующих 4 основных принципов:

1) временной структуре денег (TVM);
2) потоке платежей;
3) отсутствии арбитража;
4) рискованности операции.

Временная структура денег (TVM)

Процентная ставка — базовая характеристика зависимости временных показателей от стоимостных.

Парным понятием ей являются понятия учетной ставки, скидки, дисконта:

процентная ставка $r = \frac{C_1 - C_0}{C_0}$;

дисконт $d = \frac{C_1 - C_0}{C_1}$;

операция наращивания $C_1 = C_0(1 + r)$;

операция дисконтирования $C_0 = C_1(1 - d) = \frac{C_1}{d + r}$.

Связь значений процентной ставки (интерес) и учетной ставки (дисконт) дается соотношением $1 + r = \frac{1}{1 - d}$.

Если заданы начальные значения C_0 и r, то расчет будущей стоимости C_1 проводится с помощью операции наращивания. Если заданы будущие значения стоимости C_1 и r, то — с помощью операции дисконтирования. Дисконтирование при заданном явно дисконте — банковское дисконтирование, при явно заданной r — математическое дисконтирование.

В финансовой практике применяется всего два варианта, характеризующих зависимость процентной ставки от продолжительности периода времени, $r_t = \frac{C_t - C_0}{C_1}$. При этом предполагается заданной как параметр ставка на один базовый интервал времени (как правило, годовая).

Финансовая традиция и представления о праве собственности определяют использование 2-х формул: схему простых процентов $r_t = r_0 t$ и схему сложных процентов $r_t = (1 + r_0)^t - 1$.

Значение процентной ставки r_t можно условно интерпретировать как количество копеек, которые дает каждый рубль вложений за период времени t. Схема простых процентов является более выгодной при продолжительности интервала времени меньше базового периода (года), схема сложных процентов — при продолжительности операции больше одного базового периода (года).

Идея использования промежуточных по отношению к базовому интервалу сроков начисления процентов (капитализации) состоит в снижении срока, начиная с которого сложные проценты выгоднее простых.

Простые проценты не увеличивают собственность владельца за все время рассматриваемой финансовой операции. Владельцу финансовых средств оплачивается только время пользования по согласованной базовой процентной ставке. При использовании схемы сложных процентов увеличение собственности (капитализация) происходит при каждом начислении процента.

Поток платежей

При анализе большинства финансовых операций, состоящих из многих отдельных притоков и оттоков денег, бывает удобно использовать понятие потока платежей — *Cash flow*. В этом случае все притоки и оттоки в рамках одного периода заменяются итоговым платежом, который относится на начало либо конец периода. В результате вместо многих разрозненных и нерегулярных притоков и оттоков рассматривается конечное количество структурированных суммарных платежей.

Отсутствие арбитража

Предполагается, что в финансовой операции всегда задействовано две стороны. Если допустить, что ситуация не содержит рисков, тогда естественно предполагать, что операция должна совершаться на условиях взаимовыгодности, в частности, ни одна из сторон не должна иметь доходов без отвечающих им вложений.

Ни одна из сторон не имеет оснований предъявить претензию другой в получении излишнего дохода. Следствием этого соображения является одно из базовых утверждений направления мейнстрим: «Источником прибыли является условие неопределенности и риска».

Пожизненная рента — поток равных платежей, поступающий в течение неограниченного периода времени при фиксированной и постоянной процентной ставке.

Анализ потоков платежей в рамках концепции временной стоимости денег (TVM) опирается на работу со следующими основными показателями экономической эффективности инвестиций: NPV — приведенный чистый доход; IRR — внутренняя эффективная ставка.

Показатель чистой текущей стоимости NPV применяется для определения сегодняшней стоимости будущего потока платежей с учетом представлений TVM (временная стоимость денег), определяется дисконтированием чистого платежа на начальный момент времени.

$$\mathrm{NPV} = \sum_{i=0}^{I} \frac{C_i}{(1+r)^i} = \sum_{i=0}^{I} \frac{C_i}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_i)}.$$

$$r_i = \mathrm{const} = r, \ \ \forall\ i \in \overline{0, I}.$$

Понятие чистого платежа означает, что здесь в одном числовом значении (C_i) учтены поступления и затраты, распределенные на интервале времени от (i — 1) до i-го момента. Схема определения платежа — постнумерандо (также может применяться схема пренумерандо). При работе с инвестиционными проектами иногда привязку платежа делают к средней точке интервала. Если рассчитан NPV, то операция считается прибыльной, когда NPV > 0.

Недостатком NPV является предположение о известных значениях процентной ставки, поэтому дополняющий показатель формируется как расчетная процентная ставка по заданному прогнозному потоку платежей.

За основу для определения выбрана гипотеза об отсутствии арбитража, т. е. экономический смысл показателя IRR — внутренней эффективной ставки — состоит в том, что определяется эквивалентная ставка для схемы сложных процентов с базовым интервалом, которая выбрана для анализируемого проекта, при которой вложения тех же самых средств были бы равно эффективны анализируемой операции.

$$\mathrm{NPV}(r) = 0 \Rightarrow r = \mathrm{IRR}.$$

Определяющим для IRR является уравнение NPV = 0 по переменной r

$$\mathrm{NPV} = \sum_{i=0}^{I} \frac{C_i}{(1+r)^i} = 0.$$

Уравнение NPV(r) = 0 нелинейное, степень его зависит от количества рассматриваемых периодов, поэтому резко возрастает вычислительная сложность, вручную его удается решить итеративным подбором либо его решают в отдельных упрощенных случаях.

Показатели NPV и IRR рассматривают как взаимодополнительные, однако теоретики предлагают в большей мере полагаться на NPV, а управленцы-практики используют (в большинстве случаев) IRR как интуитивно более понятный.

Результат вычисления r интерпретируется в соотношении со следующими характерными показателями:

1) достигнутый уровень рентабельности бизнеса;
2) среднеотраслевой уровень рентабельности;
3) ожидаемый уровень рентабельности (доходность от реализации проекта);
4) средневзвешенная цена капитала фирмы WACC, т. е. те условия, на которых фирма получает заемные средства для своего обычного функционирования;
5) процентная ставка, характеризующая условия кредитования данного проекта,
   IRR > WACC.

Основное назначение показателей NPV и IRR состоит в том, что они используются как количественные меры эффективности вложений в различных вариантах бизнес-планирования, в частности, при планировании инвестиций в реальные проекты, в строительстве, реализации новых бизнес-проектов, недвижимости и т. д., либо в финансовые активы (акции, облигации, векселя).

Альтернативные показатели эффективности вложений делятся на статические (PP, ARR) и дисконтированные (DPP, NPV, IRR).

Статические показатели формируются без учета временной стоимости денег. Они привычнее для традиционного восприятия производственников и бухгалтеров, которые обычно учитывают притоки и оттоки финансовых средств по факту возникновения, вне привязки к причинам, вызвавшим платеж.

С расчетной точки зрения рассматриваются показатели, для которых ставка дисконтирования равна 0.

Одним из основных статических показателей является ARR — бухгалтерская норма прибыли. Для расчета значения ARR проекта определяется среднее значение поступлений за все рассматриваемые периоды реализации и соотносится с суммой вложений

$$\frac{\frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} C_i}{C_0} = \mathrm{ARR}.$$

Другим статическим показателем является срок окупаемости PP, который может выражаться с точностью до месяца в предположении пропорциональности поступлений в течение года,

$$\min_{0 \le i \le I} \left\{ i \mid \sum_{j=0}^{i} C_j > 0 \right\}.$$

Достоинства показателя «срок окупаемости» следующие: простота и интуитивная понятность в расчетах и истолкованиях; предназначен для быстрой отбраковки проектов с точки зрения ликвидности, а не доходности; в достаточной мере характеризует рискованность проекта. Недостатки его состоят в следующем: не говорит ничего о прибыльности; не учитывает последующие поступления и характеристики проекта после окупаемости; не учитывает обесценивание денег со временем.

Дисконтированные показатели изначально ориентированы на учет временной стоимости денег, поэтому хорошо понятны финансистам и специалистам в инвестиционном анализе.

DPP — дисконтированный срок окупаемости

$$\min_{0 \le i \le I} \left\{ i \mid \sum_{j=0}^{i} \frac{C_i}{(1+r)^i} > 0 \right\}.$$

Недостатки и достоинства этого показателя те же, что и у PP, но DPP учитывает обесценивание денег со временем.

Сроки окупаемости применяются для быстрой отбраковки рискованных проектов, особенно в условиях высокой инфляции и (или) политической нестабильности.

При анализе вложений сначала проводится прогнозирование условий реализации проекта, в частности, процентной ставки (базовой) и уровня инфляции. После этого по характеристикам проекта проводится прогнозирование притоков и оттоков по каждому периоду реализации. Для них определяется, в какой мере инфляционное обесценивание проявляется одинаково для притоков и оттоков. Если существует разница, то определяются отдельно процентные ставки для поступлений и затрат.

Условия финансирования проекта и характеристики используемых для кредитования ресурсов могут быть описаны значением средневзвешенной цены капитала WACC.

После учета особенностей налогообложения в итоге формируется поток платежей и вычисляются значения чистой текущей стоимости NPV и внутренней эффективной ставки IRR.

Например,

$$\mathrm{NPV}=\sum_{t=1}^{n}\frac{\left[R_t\prod_{n=1}^{t}(1+i_к)-C_t\mathop{\Pi}_{к=1}^{t}(1+i'_к)\right](1-n_{pr})+D_t n_{np}}{(1+WACC)^t}-IC,$$

$$\mathrm{NPV}=\sum_{t=0}^{t}\frac{C_t}{(1+r_0)^t},$$

где R_t — поступления в течение года t, выраженные в ценах нулевого периода; C_i — затраты года t, выраженные в ценах нулевого периода.

Введение этих показателей связано с тем, что прогноз поступлений и затрат легче осуществить в натуральном измерении и по ценам текущего (нулевого) периода, а затем вводить корректировку на инфляционные процессы. Для этого вводятся отдельно значения $i_к$ и $i'_к$ — уровни инфляции поступлений и затрат в период с номером к;

n_{pr} — ставка налогообложения прибыли (в формуле предполагается, что условия налогообложения не изменяются); D_t — амортизационные отчисления, которые не подлежат налогообложению; IC — инвестиционные вложения — начальные, как правило, крупномасштабные затраты средств на реализацию проекта. Обычно предполагаются сосредоточенными в начальный момент или искусственно пересчитываются с помощью операции наращивания и показателя инфляции; r_0 — условия реализации проекта, характеризующие стоимость привлечения финансовых средств, $r_0 = WACC$.

8. Управление инвестиционными проектами в условиях риска

Основные методики исследования риска при поиске стратегических альтернатив — это такие, как:

1) анализ точки безубыточности и запаса финансовой прочности;
2) метод коррекции нормы дисконта;
3) метод достоверных эквивалентов;
4) метод сценариев;
5) метод анализа чувствительности показателя.

Рассмотрим каждый из них.

Анализ точки безубыточности и запаса финансовой прочности

Предположения для применения данного метода состоят в следующем:

— фиксированный ассортимент выпуска изделий (в классическом случае рассматривается единственное изделие; при анализе составного ассортимента приходится вводить поправки либо выполнять его отдельно по каждому из изделий);

— переменные затраты, линейно зависящие от объема выпуска. Справедливо только при некоторых ограничениях на объемы. Для анализа может оказаться необходимым выделить несколько отдельных областей условной линейности затрат;

— выручка, линейно зависящая от объема выпуска;

— объем выпуска, равный объему реализации.

Затраты удается представить в виде суммы постоянных и переменных затрат

$$\sum(C_{\text{пост}} + C_{\text{перем}}),\ C = C_{\text{пост}} + C_{\text{уд.перем}} \cdot Q\ ,$$

$$Q^* P = C_{\text{пост}} + C_{\text{уд.перем}} \cdot Q^*\ ,$$

$$Q^* = \frac{C_{\text{пост}}}{P - C_{\text{уд.перем}}}\ ,$$

где QP — выручка; P^* — порог рентабельности, используется как ориентир при анализе финансовой деятельности предприятия,

$$P^* = \frac{C_{\text{пост}} \cdot P}{P - C_{\text{уд.перем}}}\ .$$

Разница между выручкой и порогом рентабельности составляет запас финансовой прочности.

При использовании анализа точки безубыточности для характеристики меры риска определяются основные факторы, влияющие на объем суммарных затрат, и выделяется их значение для сохранения запаса финансовой прочности.

Метод коррекции нормы дисконта (на основе NPV)

В данном методе предполагается при анализе показателей, характеризующих итоговый поток платежей, все предположения о рисках учесть за счет корректировки базовой безрисковой ставки на основе поправки на риск в аддитивной или в мультипликативной форме. При расчете учитывается поправка на инфляцию i

$$r = r_0 + r_r (=) r_0 (1 + r_r^0),$$

$$r_0 + r_r + i (=) r_0 \left(1 + i_r (1 + i_i)\right).$$

Поправки на риск и инфляцию могут вводиться по отдельности для каждого рассматриваемого интервала времени. Величина поправок определяется экспертным путем

$$0 < \mathrm{NPV} = C_0 + \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+2)^3} + \ldots + \frac{C_n}{(1+r)^n}.$$

Полученные значения процентных ставок используются либо при расчете показателя NPV, либо как ориентировочное при анализе внутренней эффективной ставки.

Достоинства и недостатки метода таковы. Достоинства: простота расчетов; доступность и понятность в изложении. Недостатки: полученные результаты в значительной степени зависят только от субъективной надбавки за риск; не дается никакой информации о степени риска; предполагается пропорциональное изменение риска или его сохранение с течением времени (IRR > $r_0 + r_r$).

Обычное явление — снижение степени риска по проекту в течение его выполнения; нет никакой информации о вероятностном распределении будущих потоков платежей и их статистической оценки; единственный показатель, отражающий рискованность проекта, покрывает все факторы, вызывающие неопределенные значения NPV и IRR.

Метод достоверных эквивалентов

В методе достоверных эквивалентов проводится вариация величины поступлений $C_t(1 - i_t)$. Вместо жесткого задания объема поступлений в год t в условиях безрисковой ставки рассматривается скорректированная величина, в которой коэффициент коррекции i_t определяется экспертным путем. Коэффициент i_t можно охарактеризовать как меру неуверенности экспертов в достоверности рассматриваемых значений.

Достоинства и недостатки метода следующие.

Достоинства метода таковы: простота расчетов; зависимость от времени позволяет более четко учитывать изменение по годам. Недостатки его: сложность организации экспертной оценки, особенно при получении достоверных характеристик по годам; отсутствие возможностей для проведения вероятностного исследования; невозможность расширенного анализа по влиянию различных факторов.

Метод сценариев

В данном методе рассматривается несколько различных вариантов развития ситуации (как минимум три):

1) оптимистичный;
2) пессимистичный;
3) наиболее вероятный.

Алгоритм реализации метода следующий. Определяется несколько вариантов изменения ключевых показателей (уровень инфляции, цены реализации, цены на основное сырье, объемы производства и реализации и т. д.). Для каждого показателя определяется вероятностная оценка в форме конкретного значения, отвечающего каждому варианту либо функции распределения. Для каждого варианта (сценария как сочетания значений параметров) определяется ожидаемое значение показателей эффективности проекта и их среднеквадратичное отклонение.

На основе анализа функции Лапласа даются границы доверительных интервалов и устанавливается вероятность попадания в них.

Достоинства метода заключаются в том, что есть возможность учитывать вероятностные характеристики за счет введения распределения результативных показателей и его анализа; процедура достаточно легко ложится на возможности Excel, следовательно, есть возможность расчета достаточно большого количества различных сценариев.

Недостатки его таковы: анализируется только поведение результирующих показателей; не выявляются возможные отклонения потоков платежей в процессе реализации сценариев.

Метод анализа чувствительности

При анализе чувствительности предполагается, что результирующий показатель исследуется на предмет его зависимости от изменения параметров, участвующих в его определении.

При анализе чувствительности выбирают несколько варьируемых факторов, среди них объем продаж, цену реализуемой продукции, величину производственных издержек, величину постоянных затрат, сумму инвестиционных затрат, цену привлекаемого капитала (условия кредитования).

Цель применения метода — получить оценку изменения результирующего показателя в зависимости от изменения факторов (как правило, по каждому фактору в отдельности либо согласованно по группе факторов).

Процедура реализации метода включает в себя следующие этапы:

1) формализованное описание среды реализации проекта как совокупности внешних факторов (уровень инфляции, курс валюты, налоговое окружение);
2) описание ситуации как конкурентной ситуации на рынке;

3) построение математико-финансовой модели проекта как взаимосвязи основных факторов среды, ситуации и проекта;
4) для каждого из факторов определение диапазона изменения и распределения вероятностей значений;
5) распределение вероятностей либо на основе стандартных, либо в ходе процедуры эконометрического исследования;
6) реализация расчетной модели средствами Excel либо стандартного пакета и проведение расчетов при различных сочетаниях значения факторов.

Вывод дается в терминах ожидаемого значения показателя и его отклонения.

9. Психология поведения и оценки лица, принимающего управленческие решения в условиях риска и неопределенности

Одним из удобных для применения при моделирования процесса принятия решений является представление о наличии трех взаимодействующих управляющих подсистем у лица, принимающего решения (В. Дильтей).

Аффект — эмоционально-чувственная составляющая, которая предполагает ценностную ориентацию на стабильность существования.

Воля — ориентация на достижение цели без учета или со слабым учетом ограничивающих обстоятельств.

Интеллект — рациональная составляющая, предполагающая соотнесение полученных результатов и производственных затрат.

Личностные особенности людей, принимающих решения, состоящие в доминировании конкретной подсистемы, непосредственно сказываются на стратегии фирмы, действующей в условиях риска.

Разновидности стратегии по отношению к риску следующие.

Избегание риска — из всех возможных вариантов решения выбирается тот, при котором риски либо полностью исключены, либо минимальны (A).

Принятие риска — предполагается, что риск неизбежен и не поддается осознанной корректировке; выполнение решений останавливается только в случае реальных потерь (реализация критических рисков) (B).

Управление рисками — осознанный анализ ситуации, выявление ведущих факторов, формирующих риски и выбор решения с учетом минимальных рисков при достижении удовлетворительных значений основных показателей либо максимума основных показателей при удовлетворительных результатах по рискам.

10. Применение формализма теории игр для анализа ситуации неопределенности

Игра — формализованная модель, применяемая для записи и анализа реальной конфликтной ситуации, в которой задействовано несколько сопоставимых по возможностям участников (игроков), результат взаимодействия которых оценивается количественно.

ССВ — совокупная стоимость владения,

$$\text{ССВ} = \varepsilon = \text{A} + Bt + Cn + Dtn,$$

где t — время; n — количество клиентов.

Формализация игры предполагает под собой зафиксированные правила действия игроков (стратегии); варианты действия игроков (значения стратегий); исход при каждом варианте действий (результат игры); объем информации, который имеется у каждой из сторон.

Классификация игр следующая.

1) по количеству участников —
   - игра двух лиц (простейшая);
   - игра *n*-лиц ($n > 2$);
2) по количеству стратегий —
   - конечные $\left\{A_i,\ i \in \overline{1,n}\right\}$;
   - бесконечные $\left\{B_j,\ j \in \overline{1,n}\right\}$;
3) по взаимоотношениям игроков —
   - кооперативные (коалиции заданы до начала игр);
   - коалиционные (по ходу игры возникают или распадаются). **Коалиция** — группа игроков, у которых схожие или согласованные интересы;
   - бескоалиционные (запрещено формирование коалиций, интересы всех участников взаимоисключающие);
4) по характеру выигрышей:
   - игры с нулевой суммой;
   - игры с ненулевой суммой;
5) по виду функции выигрышей:
   - матричная — антагонистическая конечная игра двух лиц с нулевой суммой;
   - биматричная — антагонистическая конечная игра двух лиц с ненулевой суммой;
   - непрерывные;
   - выпуклые;
   - сепарабельные;
6) по количеству ходов в игре:
   - одношаговые;
   - многошаговые;
   - позиционные;
   - стохастические;
   - динамические;

7) по информированности игроков:
   - игры с полной инфляцией;
   - игры с неполной инфляцией —
     - статические (игра с природой);
     - стратегические (полная неопределенность в отношении стратегии второго игрока).

Смешанная стратегия — совокупность возможных выборов игрока и вероятность данных выбора.

Смешанные стратегии применяются в случаях:

1) не существует седловой точки в игре;
2) каждый из игроков применяет смесь чистых стратегий с заранее выбранными вероятностями;
3) игра повторяется многократно в сходных условиях;
4) игроки не информированы о конкретном выборе стратегии противника;
5) результат игры оценивается по среднему выпуску.

Известно, что в смешанных стратегиях всегда существует решение, причем количество задействованных чистых стратегий не превосходит минимума из чисел m и n.

Часть вторая.
Теория принятия решений в управлении финансовыми системами и объектами

1. Методы теории вероятностей и математической статистики для количественной оценки риска

Теория вероятностей и основанная на ней математическая статистика дают, пожалуй, самые широко используемые методы оценки и управления рисками. Базовым здесь является понятие случайной величины. Простейший, но важный класс образуют дискретные случайные величины с конечным множеством значений. Каждая случайная величина из этого класса определяется своим распределением, которое может быть заданно в виде таблицы

X	X_1	X_2	...	X_n
P	P_1	P_2	...	P_n

где X_i $(i = 1, 2, ..., N)$ — значение случайной величины; P_i — вероятность реализации (появления) значения X_i. Значениями случайной величины могут быть количественные оценки последствий какого-либо действия, например, величины дохода, прибыли и иных характеристик экономико-управленческой деятельности.

Эквивалентный способ задания дискретной случайной величины — это определение ее функции распределения, т. е. функции вида $F(x) = P(X_i < x)$, показывающей вероятность того, что случайная величина принимает значение меньше фиксированного значение x. Для дискретной случайной величины функция распределения является кусочно-постоянной (рис. 1).

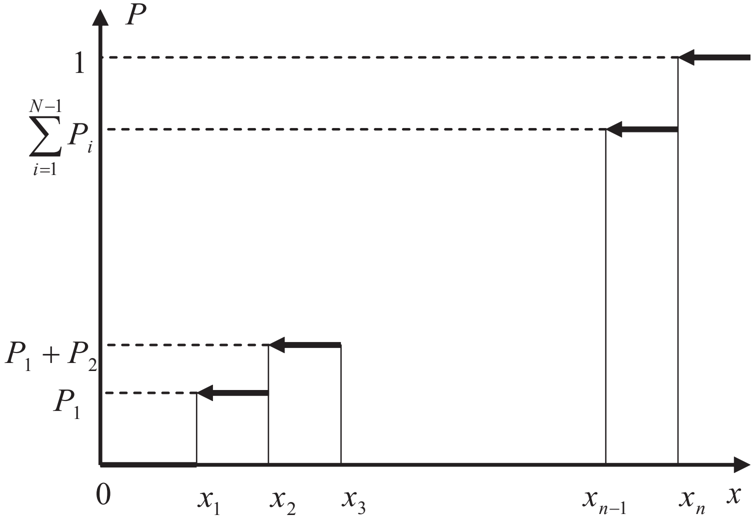

Рис. 1. Функция распределения дискретной случайной величины

Основными характеристиками случайной величины, используемые при расчете риска, являются:

— математическое ожидание (ожидаемое или среднее значение) M изучаемой случайной величины (последствий какого-либо действия, например, дохода, прибыли и т. п.);

— дисперсия σ^2;

— стандартное (среднеквадратичное) отклонение σ;

— коэффициент вариации V (стандартное относительное отклонение).

Среднее значение дискретной случайной величины с конечным множеством значений определяется соотношением $M(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i P_i$.

Средняя величина представляет собой обобщенную количественную характеристику ожидаемого результата.

Важной характеристикой, определяющей меру изменчивости возможного результата, является дисперсия — средневзвешенное из квадратов отклонений действительных результатов от среднего $\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-M(X)\right)^2 P_i$, а также очень близко с ним связанное стандартное или среднеквадратичное отклонение, определяемое равенствами $\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-M(X)\right)^2 P_i}$. Иными словами, дисперсия — это усредненное отклонение случайной величины от ее математического ожидания. Стандартное отклонение показывает меру отклонения измеряемой величины от своего среднего значения в тех же единицах, что и она сама (не в квадратах, как дисперсия).

Средний квадратический разброс можно также рассчитать по формулам

$$\sigma^2=\sum_i P_i X_i+\sum_i P_i M(X)^2-2M(X)\sum_i P_i X_i;$$

$$\sigma^2=\sum_i P_i X_i^2-M(X)^2.$$

Стандартное относительное отклонение — это стандартное отклонение, выраженное в долях математического ожидания,

$$V=\frac{\sigma}{M(X)}. \tag{1}$$

Дисперсия и среднеквадратическое отклонение служат *мерами абсолютного рассеяния,* в то время как стандартное относительное отклонение по самому своему определению есть мера рассеяния возможных результатов, учитывающая средний ожидаемый результат.

Кроме рассмотренных выше дискретных случайных величин, существуют случайные величины с иными типами распределения вероятностей. Наиболее часто используются непрерывные случайные величины. Они могут принимать бесконечное множество значений, считается, что значение теоретически может быть любым числом из заданного промежутка или всей числовой прямой. Как и для любой случайной величины, функция распределения, задаваемая равенством $F(x) = P(X_i < x)$, полностью определяет непрерывную случайную величину. Специфика непрерывных случайных величин состоит в том, что функция $F(x)$ для них предполагается непрерывно дифференцируемой на всей числовой прямой (иногда накладывают несколько более слабые условия).

В силу сделанных предположений и свойств, вытекающих из определения функции распределения как вероятности некоторого события, зависящего от аргумента x, для величины $F(x)$ справедливо представление

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt ,$$

где f — так называемая плотность распределения, или дифференциальная функция распределения, $f(x) = F'(x)$.

Важным свойством графика дифференциальной функции распределения (рис. 2) является то, что площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$ и осью абсцисс, всегда равна единице.

Использование функции плотности распределения позволяет вычислить вероятность попадания случайной величины X в интервал (α, β), которая определяется следующим образом: $P(y < X < \beta) = F(\beta) - F(y) = \int_{y}^{\beta} f(t)dt$, где $f(t)$ — дифференциальная функция распределения случайной величины X.

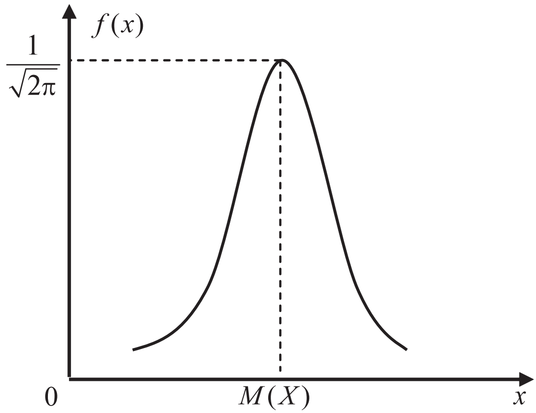

Рис. 2. Плотность нормального распределения случайной величины

Изложенные выше положения довольно часто являются исходной базой количественной оценки риска на основе использования вероятностно-статистических методов. Характер, тип распределения отражает общие условия, вытекающие из сущности и природы явления, и особенности, оказывающие влияние на вариацию исследуемого показателя (ожидаемого результата).

Для моделирования распределений, возникающих при исследовании социально-экономических явлений, наиболее часто используется так называемое нормальное распределение. Известно, что закон нормального распределения характерен для распределения событий в случае, когда их исход представляет собой результат совместного воздействия большого количества независимых факторов и ни один из этих факторов не оказывает преобладающего влияния. В действительности нормальное распределение для экономических явлений в чистом виде встречается редко, однако если однородность совокупности соблюдена, фактические распределения можно считать близкими к нормальному. На практике для проверки обоснованности выбора того или иного типа распределения используются различные статистические критерии согласия (между эмпирическим и теоретическим распределением), которые позволяют принять или отвергнуть принятую гипотезу о законе распределения.

Нормально распределенная случайная величина является непрерывной, и ее дифференциальная функция распределения имеет вид $y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-M(X))^2}{2\sigma^2}}$.

График функции плотности нормального распределения описывается так называемой нормальной кривой (кривой Гаусса) (рис. 3).

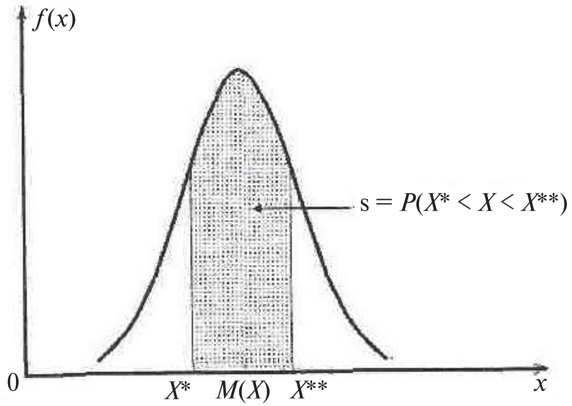

Рис. 3. Определение вероятности события
по плотности распределения

Пусть планируемое значение некоторой случайной величины равно $M(X)$ и известна плотность распределения вероятности. Зададим максимально допустимое отклонение Δ фактического результата X_{exp} от $M(X)$. В таком случае границы, в которых должен находиться этот результат, будут $X^* = M(X) - \Delta$, $X^{**} = M(X) + \Delta$. В общем случае нет необходимости предполагать, что планируемый результат совпадает с $M(X)$, ожидаемая (планируемая) величина может отличаться от средней. Границы возможных изменений по отношению к ожидаемой (запланированной) величине также могут располагаться асимметрично. Исходя из смысла функции плотности распределения вероятность P_1 того, что достигаемый результат X_{exp} будет находиться в допустимых пределах, определится равенством

$$P_* = P(X^* \le X_{exp} \le X^{**}) = \int_{X^*}^{X^{**}} f(t)dt.$$

Вероятность P_* равна площади заштрихованного участка на рис. 3.

Полученную таким образом вероятность P_* можно назвать *вероятностью достижения ожидаемого (планируемого) результата.* Возникает вопрос о том, какова вероятность попадания величины X_{exp} за пределы допустимых границ. Эту вероятность мы обозначаем символом P^*. Вычислив площадь незаштрихованного участка на рис. 3, мы получаем ответ на вопрос. Заметим, что справедливо равенство

$$P^* = P\,(X_{exp} < X^*) + P\,(X_{exp} > X^{**}) = 1 - P\,(X^* < X_{exp} < X^{**}),$$

т. е. $P^* = 1 - P_*$.

Как правило, граница изменения ожидаемого результата в положительную сторону (направление) не устанавливается, поэтому при определении P^* в большинстве случаев речь идет только о величине $P^* = P\,(X_{exp} < X^*)$.

2. Количественные оценки риска и методы их определения

Начнем с описанной в конце предыдущей главы ситуации со случайной величиной X, имеющей заданную плотность распределения. Предполагать, что планируемое значение X_{exp} совпадает с математическим ожиданием $M(X)$, уже не будем.

Предположим, что исследуемой величиной X является, например, производительность труда, а отдачей (выходом, полезностью) — чистая прибыль. Одной и той же величине производительности труда могут соответствовать различные величины чистой прибыли. Допустим, что нам удалось установить (каким-либо способом) аналитическую зависимость между производительностью труда и чистой прибылью. Назовем установленную зависимость $U = U(x)$ *функцией отдачи* (функция полезности).

Разобьем ось абсцисс на достаточно малые отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ и обозначим значения функции отдачи в средних точках x'_i этих отрезков (вправо от ожидаемых значений) через $U(x'_i)$. Вычислим величину отдачи в соответствии с вероятностью попадания исследуемой величины X в отрезок $[x_{i-1}, x_i]$. По определению функции плотности вероятности значение вероятности равно $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt$, а ожидаемая величина отдачи при значениях производительности труда в пределах данного отрезка может быть аппроксимирована выражением $U(x'_i)\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt.$

Суммируем полученные произведения в области $x > X_{\text{exp}}$:

$$U_B = \sum_i U(x'_i)\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt, x'_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

Сумма отдачи в области $x > X_{\text{exp}}$ характеризует возможный выигрыш $U_{\text{В}}$.

Заметим, что описанная процедура расчета величины $U_{\text{В}}$ соответствует приближенному вычислению используемого в теории вероятностей интеграла Стилтьеса по функции распределения случайной величины, точное значение которого получится при стремлении длин отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ к нулю.

Аналогичные расчеты в области $X < X_{\exp}$ характеризуют возможные потери U_{Π} : $U_{\Pi} = \sum_i U(x^{*}{}'_i) \int_{x^{*}_{i-1}}^{x^{*}_i} f(t)dt, x^{*}{}'_i = \frac{x^{*}_{i-1} + x^{*}_i}{2}$.

Иллюстрация описанной процедуры приведена на рис. 4.

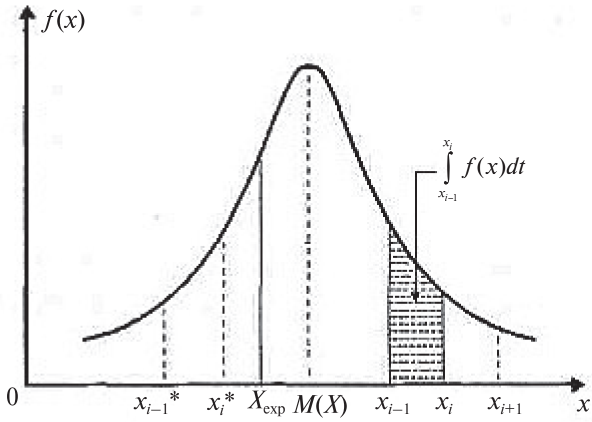

Рис. 4. Приближенный расчет величины отдачи

Используя проведенные построения, определим коэффициент риска следующим образом: $r = U_{\Pi}/U_{B}$.

Очевидно, что риск уменьшается, если растет вероятность наступления события $X > X_{\exp}$ (за счет уменьшения интервала $x < X_{\exp}$, т. к. площадь, ограниченная всей кривой плотности, остается неизменной). Риск также уменьшается, если в области $x > X_{\exp}$ растет отдача или в области $x < X_{\exp}$ уменьшаются потери, что определяется характером функции отдачи в указанных областях.

Величина рассматриваемого коэффициента риска r может изменяться от 0 до $+\infty$. Случай, когда $U_{\Pi} = 0, r = 0$, означает отсутствие риска. Такое положение наступает, например, во всех случаях, когда решение принимается с такой степенью надежности, что величину показателя X_{exp} принимают лежащей на нижней границе действительной области изучаемой величины. При движении X_{exp} к нижней границе имеем $U_{\text{П}} \to 0$ или $r \to 0$. Если же X_{exp} стремится к верхней границе действительной области значений изучаемой величины, то справедливы соотношения $U_{\text{В}} \to 0$ или $r \to +\infty$.

Замечание. В случае, если действительная плотность распределения аппроксимируется функцией плотности нормального распределения, т. е. распределение считается нормальным, указанные границы часто полагают равными ($a \pm 3\sigma$). Вероятность принять значения вне промежутка $(a-3\sigma,\ a+3\sigma)$ менее 0,01.

Полученный таким образом коэффициент риска (будем называть его теоретическим) отражает *экономическую сторону риска*. Следует отметить, что его использование затруднено рядом обстоятельств, которые мы укажем ниже.

Вводя выше коэффициент риска, мы использовали теоретико-вероятностные понятия. Однако этот коэффициент можно ввести и абстрагируясь от теории вероятностей, а именно: пусть исследуется некоторая величина X, подверженная риску. Символом X_{exp} обозначим ее планируемое значение. Пусть имеется числовой показатель качества величины X, обозначаемый U (выше это была функция отдачи). Назовем *коэффициентом риска* (в общем случае) величину $r = \dfrac{U^-}{U^+}$, где U^- — числовая характеристика (мера) значений X, меньших X_{exp} (в случае отклонения X от X_{exp}); U^+ — числовая характеристика значений X, больших X_{exp}. Таким образом, U^- и U^+ определяются следующим образом:

$$U^- = U\{X \mid X < X_{\text{exp}}\};$$

$$U^+ = U\{X \mid X_{\text{exp}} \geq X_{\text{exp}}\}.$$

Коэффициент риска r в общем случае показывает соотношение ожидаемых величин отрицательных и положительных отклонений значений X от ожидаемого уровня X_{exp}. Он содержит планируемое значение X_{exp} исследуемой величины X; значения показателей качества, относящихся к возможным ситуациям, которые показывают соответствующие размеры прибыли или потерь.

В простейшем случае, когда величина X сама характеризует результат (прибыль, доход и аналогичные величины) и множество возможных вариантов ее значений состоит из N элементов X_i, коэффициент риска ожидаемого результата X_{exp} может быть рассчитан по формуле

$$r = \left(\frac{\sum X_i (X_i < X_{\text{exp}})}{n} - X_{\text{exp}} \right) \Bigg/ \left(\frac{\sum X_i (X_i \geq X_{\text{exp}})}{N-n} - X_{\text{exp}} \right),$$

где количество элементов $X_i < X_{\text{exp}}$ равно n.

Одним из недостатков рассмотренного коэффициента риска являются границы его изменения ($0 \ldots +\infty$), что затрудняет принятие решений в конкретной ситуации. Устранение этого недостатка осуществляется путем нормирования коэффициента риска, в результате чего его величина изменяется в конечных пределах (например, 0–1).

Нормированный коэффициент риска будем называть индексом риска. Вариантом такого нормирования является следующее преобразование: $r^* = \dfrac{r}{r+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$.

Возникает вопрос: какое значение следует придать ε? Прежде чем ответить на него, отметим важную роль этого параметра. Выбором различных значений ε для разных отраслей можно добиться сближения уровней риска, которые неодинаковы в силу объективных условий, например различных отраслей экономики, а именно: если положить величину ε равной среднему риску для данной отрасли, то при $r = \varepsilon$ индекс риска составит 0,5, т. е. для всех отраслей индексы риска в среднем будут одинаковы и равны 0,5.

Иной способ позволяет ограничить изменение индекса риска в пределах от нуля до единицы, не уравнивая полностью индексы отраслей. В том варианте величину ε выбирают как положительный корень уравнения

$$\frac{\bar{r}}{\bar{r}+\varepsilon}=\varepsilon, \tag{2}$$

где через r обозначен средний коэффициент риска. Уравнение (2) имеет единственный положительный корень $\varepsilon=\dfrac{-r+\sqrt{\bar{r}^2+4\bar{r}}}{2}$.

Какие же свойства имеет индекс риска r^* с параметром ε, определенным таким образом? Во-первых, $r^*=\varepsilon$ и $0<r^*<1$ при $\bar{r}>0$, во-вторых, если $\bar{r}_1>\bar{r}_2$, то $r_1^*>r_2^*$. Таким образом, переход средних рисков к соответствующим индексам риска позволяет работать с величинами из промежутка [0,1], при этом большим значениям средних рисков соответствуют большие значения индекса, а меньшим — меньшие. Эти свойства нетрудно установить аналитически, проведя исследование явного выражения для r^*. Геометрическая иллюстрация решения уравнений (2) приведена на рис. 5.

Вторая группа свойств индекса r^* выражается соотношениями: $\bar{r}<r^*<0,5$ при $\bar{r}<0,5$; $\overline{0,5}<r^*<\bar{r}$ при $\bar{r}>0,5$ и $\bar{r}=r^*=0,5$ при $\bar{r}=0,5$. Приведенные неравенства означают, что индексы риска для отраслей с различными степенями риска группируются около значения 0,5.

Рассмотрим следующий пример. Пусть имеются две отрасли и в каждой — по два коэффициента риска:

1) $r_1^1=0,1$; $r_2^1=0,2$;
2) $r_1^2=0,8$; $r_2^2=0,9$.

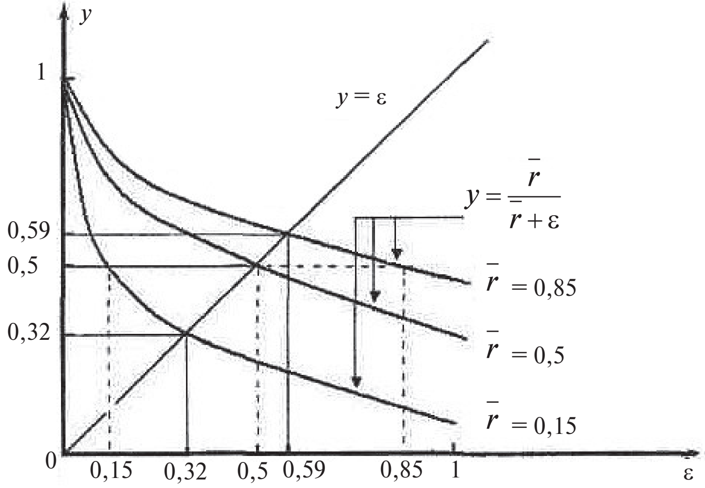

Рис. 5. Свойства индекса риска

В первой отрасли $\bar{r} = 0{,}15$ и $\varepsilon = 0{,}31$, во второй соответственно $\bar{r} = 0{,}85$ и $\varepsilon = 0{,}59$. Значения ε и будут индексами риска в соответствующих отраслях. На рис. 5 изображена эта ситуация. Корни уравнения (1) — ординаты точек пересечения прямой $y = \varepsilon$ и кривых $y = \frac{\bar{r}}{\bar{r}+\varepsilon}$ с соответствующими значениями параметра $\bar{r}$. Названные кривые проходят через точки (0; 1) и ($\bar{r}$; 0,5).

В приведенных построениях коэффициенты риска r зависят от планируемого значения исследуемого показателя, т. е. $r = r(X_{\text{exp}})$. Таким образом, коэффициент риска r можно рассматривать как некоторую функцию $r = r(x)$. Если аргумент x — случайная величина, то можно говорить о функции распределения коэффициента риска, а следовательно, и о функции распределения индекса риска.

Приведенный выше пример (можно привести и другие) свидетельствует о том, что надлежащим преобразованием можно обеспечить сближение индексов риска для различных отраслей. Если аргументы случайные, еще более желательным результатом было бы сближение распределений индексов риска. Обозначим через s_i «вес» отрасли i, через $F_i(x)$ — распределение индекса риска для отрасли i. В таком случае естественно находить $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ из условия минимизации величины $\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{n} \left[s_i s_j \left| G_i\left(\frac{x}{x+\varepsilon_i}\right) - G_j\left(\frac{x}{x+\varepsilon_j}\right) \right| \right]$.

Еще одним существенным недостатком коэффициента риска является то, что с его помощью невозможно учесть субъективные факторы. Известно, что одна и та же субъективная ситуация может означать неодинаковую степень риска для предпринимателей, деятельность которых протекает на различном фоне. Так, например, возможные потери в сумме 10 тыс. долларов для одного предпринимателя могут стать катастрофическими, поскольку приведут к его полному разорению, а для другого такие потери могут оказаться практически неощутимыми. Эти субъективные обстоятельства никак не учитываются посредством рассмотренного выше коэффициента риска.

И, наконец, одним из серьезных недостатков коэффициента риска является необходимость иметь при его определении функцию полезности — тщательно рассчитанные зависимости между изучаемым показателем и относительной отдачей. Установление данных зависимостей для разнообразных сложных экономических показателей в большинстве случаев — задача достаточно сложная и трудноразрешимая. Ее решение требует владения обширной (иногда труднодоступной либо отсутствующей вообще) информации, значительного времени и затрат, поэтому рассмотренный коэффициент риска используется при планировании и оценке крупных проектов и программ.

Указанные выше недостатки приводят к тому, что на практике используются различные *критерии оценки* и *показатели уровня риска* в зависимости от сложности решаемых задач и сферы предпринимательской деятельности. При этом наряду с количественным определением уровня риска его оценка дополняется с помощью различных шкал, являющихся в некоторой степени рекомендациями по «приемлемости» риска и учитывающих субъективные факторы. Рассмотрим некоторые такие подходы к оценке риска.

В ряде случаев, в частности в страховом бизнесе, в качестве количественной оценки риска используется вероятность наступления рискового события. Одним из наиболее распространенных подходов к количественной оценке риска является использование выражения $R = U_{\Pi} P$, где U_{Π} — величина потерь; P — вероятность наступления рискового события. Таким образом, степень риска определяется как произведение ожидаемого ущерба на вероятность того, что такой ущерб произойдет.

Отношение субъекта к соотношению возможных потерь и выигрыша в значительной степени зависит от его имущественного состояния, поэтому на практике часто используют коэффициент риска r, определяемый как отношение возможных максимальных потерь $U_{\Pi\max}$ к объему собственных финансовых ресурсов U_c предпринимателя (фирмы) $r = U_{\Pi\max}/U_{\text{c}}$. Величина этого коэффициента определяет *риск банкротства*.

В большинстве случаев указанные количественные оценки риска и методы их определения используются для оценки отдельных видов риска. Вместе с тем они могут быть использованы и для оценки риска проекта в целом. Это относится к случаям, когда имеются количественные данные по каждому риску или когда для оценки риска проекта используются экспертные методы, в процессе которых оценивается вероятность успешной реализации проекта и (или) величина возможных потерь вследствие наступления различного рода нежелательных исходов.

Так, если проект подвержен различным видам риска и имеются данные о величине потерь по каждому виду, то *обобщенный коэффициент риска банкротства* определяется соотношением $r = \frac{\sum_{i=1}^{N} U_{\Pi\max}^{(i)}}{k} = \sum_{i=1}^{N} r_i$, где N — число учитываемых видов риска; $U_{\Pi\max}^{(i)}$ — максимально возможные потери по i-му виду риска; r_i — коэффициент, определяющий риск банкротства по i-му виду риска.

При наличии данных о потерях и вероятности их возникновения по каждому виду риска *обобщенный коэффициент риска проекта* определяется как сумма средневзвешанных показателей риска каждого вида, т. е. из выражения $R = \sum_{i=1}^{N} P_i U_{\Pi\max}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} R_i$.

Как отмечалось ранее, при отсутствии необходимых статистических данных количественная оценка как отдельных рисков, так и риска проекта в целом осуществляется методом экспертных оценок. При этом каждый вид риска характеризуется несколькими показателями (факторами). Оценка этих показателей определяется экспертами в баллах, кроме того, каждому из показателей назначается вес, соответствующий его значимости.

Количественная оценка риска каждого вида и риска проекта в целом определяется из следующих выражений: $R = \sum_{j=1}^{N} R_j g_j$, $R_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n_j} R_{ij} g_{ij} \quad (j = \overline{1, N})$, где R — обобщенный показатель риска (риск проекта); R_j — количественная оценка j-го вида риска; g_j — вес j-го вида риска; m — размах балльной шкалы, в пределах которой осуществляется оценка факторов; n_j — число учитываемых факторов j-м виде риска; R_{ij} — балльная оценка i-го фактора в j-м виде риска; g_{ij} — вес i-го фактора в j-м виде риска.

При балльной оценке отдельных рисков и риска проекта в целом используются следующие правила:

— балльная оценка каждого фактора осуществляется в пределах балльной шкалы $0 \le R_{ij} \le m$ (как правило, 0—10 баллов) в зависимости от степени влияния данного фактора на степень j-го вида риска с ранжированием от 0 (не оказывает влияния) до m (очень высокое влияние);

— вес каждого фактора в пределах соответствующего вида риска и вес каждого вида риска устанавливается в пределах (0,1) при выполнении условий: $\sum_{i=1}^{n_j} g_{ij} = 1 \quad (j = \overline{1, N})$ и $\sum_{j=1}^{N} g_j = 1$. При выполнении указанных условий количественная оценка каждого вида риска и обобщенный показатель риска (риск проекта) принимают значения из интервалов $0 \le R_{ij} \le 1$ и $0 \le R_j \le 1$.

Таковы некоторые наиболее распространенные подходы к определению количественных оценок экономического риска.

3. Шкалы риска

Как отмечалось ранее, в настоящее время отсутствуют научно обоснованные рекомендации по определению «приемлемости в процессе принятия управленческих решений» того или иного уровня риска в конкретной ситуации. Кроме того, в ряде рассматриваемых нами и широко используемых на практике оценках уровня риска отсутствуют потери. Вместе с тем при выработке стратегии поведения и в процессе принятия конкретного решения предпринимателю целесообразно различать и выделять определенные зоны риска в зависимости от уровня возможных потерь. Попыткой восполнить указанные недостатки и дополнить полученные оценки уровня риска нужной в процессе принятия управленческих решений информацией является разработка и использование различного рода так называемых шкал риска, позволяющих классифицировать поведение лиц, принимающих на себя хозяйственный риск.

Как и по большинству других вопросов, в литературе нет единого подхода к построению и критериям оценки шкалы риска. Многообразие показателей, посредством которых осуществляется количественная оценка риска, порождает и многообразие шкал риска, являющихся своего рода рекомендациями приемлемости того или иного уровня риска. Так, на основании обобщения результатов исследований многих авторов по проблеме количественной оценки экономического риска в источнике [3] приведена эмпирическая шкала риска, которую рекомендуют применять предпринимателям при использовании ими в качестве количественной оценки риска вероятности наступления рискового события доли:

0,0–0,1 .... минимальный риск
0,1–0,3 .... малый
0,3–0,4 .... средний
0,4–0,6 .... высокий
0,6–0,8 .... максимальный
0,8–1,0 .... критический

По мнению авторов, первые три градации вероятности нежелательного исхода соответствуют нормальному, разумному риску, при котором рекомендуется принимать обычные предпринимательские решения. Принятие решений с более высоким уровнем риска зависит от склонности к риску лиц, принимающих решение. Однако принятие таких решений возможно только в случае, если наступление нежелательного исхода не приведет предпринимателя (фирму) к банкротству.

В книге [2] приведена шкала, которая дает оценку степени риска при использовании в качестве критерия риска среднего ожидаемого значения $M(X)$ и среднеквадратического отклонения σ^2 как меры изменчивости возможного результата.

Для оценки приемлемости отклонения используется коэффициент вариации ($V = \sigma / M(X)$ — см. п. 2.2). При этом приводятся следующие зоны риска для данного критерия:

1) до 0,1 — слабая;
2) 0,1–0,25 — умеренная;
3) свыше 0,25 — высокая.

При оценке приемлемости коэффициента, определяющего риск банкротства, существует несколько не противоречащих друг другу точек зрения. Одни авторы считают, что оптимальным является коэффициент риска, составляющий 0,3, а коэффициент риска, ведущий к банкротству, — 0,7 и выше. В других источниках приводится шкала риска со следующими градациями указанного выше коэффициента:

приемлемый риск — до 0,25;
допустимый риск — 0,25–0,50;
критический риск — 0,50–0,75;
катастрофический риск — свыше 0,75.

По мнению практически всех авторов, в границах коэффициента 0,3–0,7 находится зона повышенного риска. Принятие решений о реализации рискового мероприятия в границах этой зоны определяется величиной возможного выигрыша в случае, если нежелательный исход (рисковое событие) не произойдет, и склонностью к риску лиц, принимающих решение.

Безотносительно к коэффициентам риска существуют описательные характеристики шкал риска по величине ожидаемых потерь, которые можно рекомендовать для оценки приемлемости содержащего риск решения.

Достаточно близкие по формулировке и наиболее приемлемые для оценки и практического применения градации риска приведены в книгах [5] и [4].

В работе [5] градации риска в зависимости от уровня возможных потерь осуществляются путем выделения следующих весьма условных зон риска:

1) приемлемого;
2) допустимого;
3) критического;
4) катастрофического.

Другие авторы [4] выделяют области риска:

1) минимальный;
2) повышенный;
3) критический;
4) недопустимый.

При этом характеристики указанных градаций (зон, областей) практически совпадают.

Зона приемлемого (минимального) риска характеризуется уровнем потерь, не превышающим размеры чистой прибыли.

Зона допустимого (повышенного) риска характеризуется уровнем потерь, не превышающим размеры расчетной прибыли.

Мы лишь бегло остановились на принципах формирования различных шкал рисков. Более подробно этот вопрос обсуждается в цитированной литературе.

4. Риск в теории матричных игр

В теории игр часто предполагается, что игроки выбирают свои стратегии независимо друг от друга. Целью игры является, как правило, выбор стратегии, соответствующей точке равновесия, т. е. такой ситуации, отклонение от которой каждого игрока по отдельности лишь ухудшает его результат.

Между тем стратегия равновесия (равновесная стратегия) — это стратегия надежности, она отражает стремление получить гарантированный результат независимо от действий партнеров. Естественным следствием этого является тот факт, что она обеспечивает, вообще говоря, очень скромный выигрыш. Однако вполне разумным является также выбор стратегии, отличающейся от равновесной и связанной с определенным риском. При выборе такой стратегии нужно учитывать все возможности, которые открываются в ходе игры: предполагаемое поведение игроков, выгоды, которые могут быть получены в результате избранной стратегии, их стабильность и т. п.

Заметим, что в теории игр предполагается, что среди игроков имеется хотя бы один, который действует сознательно и целенаправленно, остальные же могут руководствоваться случайным выбором, примером служат так называемые «игры против природы». В этом случае считается, что свою стратегию природа «выбирает» независимо от других участников игры.

Рассмотрим матричную игру (например, «игру против природы»). В матрице игры (для наглядности изобразим ее в виде таблицы) строки означают возможные варианты решений, принимаемых игроком (им могут быть плановик, руководитель и др.), а столбцы — возможные состояния природы (хозяйственной среды). Элемент матрицы a_{ij} означает сумму платежа в ситуации, когда игрок (будем называть его первый игрок) принимает решение i (выбирает стратегию i) при состоянии природы j (второй игрок выбирает стратегию j). Естественно полагать, что игрок стремится максимизировать сумму платежа, а природа (исходим из наихудших из возможных ситуаций) — минимизировать. Постановка игровой задачи оптимизации решений, принимаемых в условиях риска, может быть представлена следующим образом:

— имеется n возможных стратегий $s_1, s_2, \ldots, s_n$ первого игрока;
— возможные варианты действий контрагента (состояния природы) точно неизвестны, однако о них можно сделать m предположений q_1 q_2, ..., q_m (стратегии второго игрока);
— результат, так называемый выигрыш a_{ij}, соответствующий каждой паре стратегий первого и второго игроков, может быть представлен в виде элемента платежной матрицы:

Матрица платежей (выигрышей) в игре с двумя участниками

Варианты стратегий 1-го игрока	Варианты стратегий 2-го игрока			
	q_1	q_2		q_m
s_1	a_{11}	a_{12}		a_{1m}
s_2	a_{21}	a_{22}		a_{2m}
...	...	...	...	...
s_n	a_{n1}	a_{n2}		a_{nm}

Выигрыши, указанные в матрице, являются показателями эффективности решений. Выбор решения в условиях риска предполагает, что вероятности возможных вариантов обстановки известны. Эти вероятности определяются на основе статистических данных, а при их отсутствии — на основе экспертных оценок. Наличие выигрышей, являющихся показателями эффективности решений, позволяет определить потери в результате принятия неоптимальных решений.

Укажем некоторые критерии, которые используются при принятии решений в теории игр.

Принцип недостаточного обоснования Лапласа используется в случае, если можно предполагать, что любое из возможных состояний природы не более вероятно, чем другое, т. е. считается, что все состояния равновероятны. Таким образом, стратегия s_i «предпочтительнее» стратегии s_j (пишем в дальнейшем $s_i > s_j$), если $M(s_i) > M(s_j)$, где $M(s)$ — ожидаемый выигрыш при использовании стратегии s, или $\sum_{k=1}^{m} a_{ik} > \sum_{k=1}^{m} a_{jk}$.

Применение этого критерия целесообразно в тех случаях, когда велики различия между отдельными состояниями природы, т. е. велика дисперсия значений a_{rk}, $k = 1, ..., n$. Это очень удобный критерий, но его недостаток заключается в том, что теряется структура игры.

Максиминный критерий Вальда предлагает выбор самой осторожной пессимистической стратегии, что соответствует минимаксной стратегии в статистических играх. Критерий Вальда рекомендует выбирать такой вариант, при котором в худших условиях достигается наибольший эффект: $s_i > s_j$, если $\min\limits_k a_{ik} > \min\limits_k a_{jk}$.

Таким образом, критерий Вальда используется в случаях, когда требуется гарантия, чтобы выигрыш в любых условиях оказывался не менее, чем наибольший из возможных в самых худших условиях. Наилучшим решением будет то, для которого выигрыш окажется максимальным из всех минимальных при различных вариантах условий. Критерий, используемый при таком подходе, получил название максимина. Его формализованное выражение $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$.

Данный критерий прост и четок, но консервативен в том смысле, что ориентирует принимающего решение на слишком осторожную линию поведения. В связи с этим критерием Вальда главным образом пользуются в случаях, когда необходимо обеспечить успех при любых возможных условиях.

Критерий обобщенного максимина (пессимизма — оптимизма) Гурвица используется в том случае, когда требуется выбрать «среднюю» линию поведения — между линией поведения в расчете на «худшее» и линией поведения в расчете на «лучшее». Он предлагает компромиссное правило выбора стратегии поведения. Для каждой стратегии s_i выбирается величина $h_j = \lambda \max\limits_k a_{ik} + (1-\lambda) \min\limits_k a_{ik}, \quad 0 \le \lambda \le 1$.

И, таким образом, $s_i > s_j$, если $h_i > h_j$.

Очевидно, что зависимость величины h_i, $i = 1, \ldots, n$, от параметра λ очень велика. Этот параметр можно назвать «параметром оптимизма», т. к. увеличение λ означает повышение уверенности в успехе. Применение этого критерия осложняется, когда нет обоснованного представления о величине параметра λ. Очевидно, этим параметрам в разных ситуациях целесообразно придавать различные значения. Можно отметить, что критерий Вальда является частным случаем критерия Гурвица при $\lambda = 0$. Если $\lambda = 1$, то мы имеем дело с крайне оптимистической точкой зрения, которую будем называть стратегией максимакс.

Значения λ между 0 и 1 являются промежуточными между наибольшим риском и осторожностью и выбираются в зависимости от конкретной обстановки и склонности к риску лица, принимающего решение. Недостатком критерия Гурвица (кроме того, что λ — трудно определяемый субъективный параметр) является то, что он охватывает не всю структуру целиком, а только один или два ее элемента, остальная же информация не используется.

Минимаксный критерий Сэвиджа используется в тех случаях, когда требуется в любых условиях избежать большого риска. В соответствии с этим критерием предпочтение следует отдать решению, для которого максимальные при различных стратегиях поведения потери окажутся минимальными. Критерий Сэвиджа пытается минимизировать «упущенную выгоду». Достигается это с помощью перехода к другим данным, которые уже рассчитываются по критерию Вальда. Формула перехода $b_{ij} = a_{ij} - \max_k a_{kj}$. В ней b_{ij} означает выгоду, которую мы упустили, не зная, какое из состояний наступит в соответствующий момент. Таким образом, критерий можно обобщить в виде $s_i > s_j$, если $\min_k (a_{ik} - \max_r a_{rk}) \geq \min_k (a_{jk} - \max_r a_{rk})$.

Критерий Сэвиджа представляется весьма приемлемым в случае принятия решений на длительный период. Например, некоторые экономисты считают его наиболее приемлемым для решений по капиталовложениям на перспективу. Этот критерий также относится к разряду осторожных. Однако, в отличие от критерия Вальда, который направлен на получение гарантированного выигрыша, критерий Сэвиджа минимизирует возможные потери.

Основным исходным допущением этого критерия является предположение о том, что на наступление вариантов обстановки оказывают влияние действия разумных противников (конкурентов), интересы которых прямо противоположны интересам лица, принимающего решение. И если у противников (конкурентов) имеется возможность извлечь какие-либо преимущества, то они это обязательно сделают. Данное обстоятельство заставляет лицо, принимающее решение, обеспечить минимизацию потерь вследствие этих действий.

Критерий Байеса применяется в тех случаях, когда известно распределение вероятностей возможных состояний. Если это дискретное распределение вероятностей задано набором вероятностей $[p_1, ..., p_k, ..., p_n]$, то по критерию Байеса стратегия s_i предпочтительнее s_j $(s_i > s_j)$, если $\sum_k a_{ik} p_k > \sum_k a_{jk} p_k$.

Таким образом, как в случае критерия Лапласа, выбор производится на основе максимизации ожидаемой величины, соответствующей заданному распределению, которое здесь уже не предполагается равномерным. Конечно, применение критерия Байеса ограничивается тем, что распределение вероятностей предполагается заранее известным.

При реализации *критерия Ходжеса — Лемана* используется два субъективных показателя: во-первых, распределение вероятностей, используемое в критерии Байеса, во-вторых, «параметр оптимизма» из критерия Гурвица $s_i > s_j$, если

$$\lambda \sum_k a_{ik} p_k + (1-\lambda) \min_k a_{ik} > \lambda \sum_k a_{jk} p_k + (1-\lambda) \min_k a_{jk}, \; 0 \le \lambda \le 1.$$

Частными случаями этого критерия являются критерий Байеса (при $\lambda = 1$) и критерий Вальда (при $\lambda = 0$). Недостатком данного критерия является то, что в нем используется много субъективных факторов.

Критерий Кофмана опирается на понятия «неудача» и «успех». Результат меньший, чем p_2, объявляется «неудачей», а больший, чем p_1, оценивается как «успех» (p_1 и p_2 — субъективные параметры). Вероятность неудачи оценивается в $\alpha \cdot 100\,\%$, вероятность успеха — в $\gamma \cdot 100\,\%$. Это тоже субъективные параметры. Таким образом, в данном критерии используется четыре субъективных параметра:

$$s_i > s_j \text{, если } \alpha q_i^- + \beta q_i^0 + \gamma q_i^+ > \alpha q_j^- + \beta q_j^0 + \gamma q_j^+,$$

где $\beta = 1 - \alpha - \gamma$.

Итак, рассмотрим матричную игру. Каждая допустимая, но неравновесная стратегия может быть названа *рисковой стратегией*. Участник идет на риск в надежде получить относительно большую прибыль (прибыль, превышающую цену игры); принимает такое решение, следствием которого может быть выигрыш, меньший равновесного значения.

Естественно, в игре с противником, последовательно применяющим оптимальную равновесную стратегию, рисковую стратегию применять нецелесообразно, потому что, поступая так, можно только проиграть.

Вместе с тем против игрока, осуществляющего также рисковую тактику, уже стоит использовать возможности отхода от равновесной стратегии. Это вытекает из самого определения равновесной стратегии. Прежде чем приступить к описанию применения рисковой стратегии в матричной игре, следует привести определения понятий, которые мы в дальнейшем будем также использовать. Это понятия типичной прибыли и типичного ущерба (не следует смешивать со средней прибылью и средним ущербом).

Пусть матрица игры имеет вид

$$\begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} q_1 & q_2 & q_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Вводимые понятия поясним на примере.

Назовем типичным ущербом $T_у$ максимально возможный размер ущерба, а типичной прибылью $T_П$ максимально возможный размер прибыли. Нетрудно проверить, что равновесная стратегия для нашей матрицы игры обеспечивает результат, равный нулю,

$$\min_k \max_i a_{ik} = \max_i \min_k a_{ik} = 0.$$

Таким образом, если первый игрок применяет стратегию s_1, то

$$T_П = 5 - 0 = 5\ ;$$

$$T_у = 0 - (-4) = 4.$$

Следовательно, коэффициент риска вида $r = T_у / T_П$ стратегии s_1 первого игрока $r = 4/5 = 0,80$.

Множество стратегий первого игрока, для которых коэффициент риска r меньше или равен r_1, будем называть *множеством допустимых стратегий* и обозначать символом $\delta(I; r_1)$. Итак, имеем

$$\delta(I;0) = \{s_3\},$$
$$\delta(I;0,33) = \{s_2, s_3\},$$
$$\delta(I;0,5) = \{s_2, s_3\},$$
$$\delta(I;0,5) = \{s_1, s_2, s_3\} = s.$$

Здесь символ s означает пространство всех стратегий первого игрока. Минимальную величину r_5, для которой множество допустимых стратегий совпадает с пространством всех стратегий, будем называть *рисковым максимумом* множества стратегий первого игрока и обозначать $R_s^{\max}$. В данном случае рисковый максимум множества стратегий первого игрока $R_s^{\max} = 0,80$.

Допустимые стратегии δ второго игрока

$$\delta(II;0)=\{q_2\},$$
$$\delta(II;0,7)=\{q_2\},$$
$$\delta(II;0,75)=\{q_1,q_2\},$$
$$\delta(II;5,0)=\{q_1,q_2,q_3\}=q,$$

где q — пространство всех стратегий второго игрока.

Рисковый максимум множества стратегий второго игрока $R_q^{\max}=5,00.$

Очевидно, что так как значение коэффициента риска r для оптимальной чистой стратегии равно 0, то оптимальная чистая стратегия будет принадлежать множеству допустимых стратегий. Рисковый минимум данного множества стратегий можно определить следующим образом: это — минимальная величина r, при которой множество допустимых стратегий будет состоять по крайней мере из двух элементов. Обозначим рисковый минимум через $R^{\min}$, тогда для нашего случая

$$R_s^{\min}=0,33;$$
$$R_q^{\min}=0,75.$$

Величина $R^{\min}$ дает информацию о возможностях пойти на риск, а $R^{\max}$ — о пределах этих возможностей.

5. Анализ риска с помощью функции полезности

В главе 2 мы обсуждали роль функции полезности при анализе рисков. Теперь, используя эту функцию, наметим подходы к сопоставлению полезности случайных и детерминированных величин.

Пусть x — инвестиции (вложения) в проект, $U(x)$ — степень (функция) полезности этих вложений. Полезность инвестиций x можно измерять по-разному:

— как внутреннюю норму дохода IRR проекта с инвестициями x;
— чистую приведенную стоимость NPV проекта после вложений x;
— приращение после дополнительных инвестиций x абсолютной прибыли совокупного (глобального) проекта;
— приращение после вложений x нормы прибыли глобального проекта;
— степень достижения какой-либо цели в зависимости от вложений x.

Внутренняя ставка дохода показывает степень рентабельности проекта. При ставке дисконтирования, равной внутренней ставке дохода, чистая приведенная стоимость проекта NPV [17] обращается в нуль. Внутренняя ставка дохода и чистая приведенная стоимость представляют собой взаимодополняющие, а не исключающие критерии: внутренняя ставка дохода показывает норму прибыли, чистая приведенная стоимость — абсолютную величину прибыли. Так, если имеется два проекта A и B с начальными инвестициями $I_A \neq I_B$, то вполне может оказаться, что проект A имеет большую норму прибыли — большую внутреннюю ставку дохода, а проект B дает большую абсолютную прибыль — имеет большую чистую приведенную стоимость.

Функция полезности $U(x)$ показывает степень выгодности какого-либо варианта вложений в объеме x, например, как чистую приведенную стоимость или как норму рентабельности проекта.

Типичная зависимость полезности от объема вложенных средств такова. При малых x каждое новое дополнительное вложение расширяет возможности инвестора, поэтому сначала полезность вложений x растет сверхлинейно (по x)

$$U(x + 1) > U(x) + U(1).$$

При больших значениях x каждое дополнительное вложение уже не влияет столь значительно на результат, возможности инвестиций реализуются в порядке убывающей отдачи от вложений. Таким образом, при больших значениях x полезность вложений растет менее, чем линейно по x,

$$U(x+1) < U(x) + U(1).$$

При средних значениях вложений x функция полезности может возрастать линейно по x

$$U(x+1) < U(x) + U(1).$$

Сверхлинейный, линейный или более медленный, чем линейный, рост функции полезности по величине вложений x может быть использован для выяснения степени отношения к риску.

Будем говорить, что *инвестор A избегает риска,* если его функция полезности U_A отражает предпочтение детерминированной величины полезности по отношению к случайной величине с тем же математическим ожиданием. Математически это выражается следующим образом:

$$U_A\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x^{(i)}\right) > \sum_{i=1}^{n} p_i U_A(x^{(i)}),$$

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1; \quad p_i \geq 0; \quad i = 1, ..., n.$ (3)

Функция $U_A(x)$, удовлетворяющая условиям (3), называется вогнутой. Вогнутая функция полезности, изображенная на рис. 6, описывает предпочтения лица, избегающего риска. Такая функция полезности соответствует уменьшающейся отдаче на вложения x. Для вогнутой функции полезности справедливо свойство: отрезок, соединяющий две точки графика функции, соответствующие, например, значениям $x^{(1)}$ и $x^{(1)}$, находится под графиком (рис. 6).

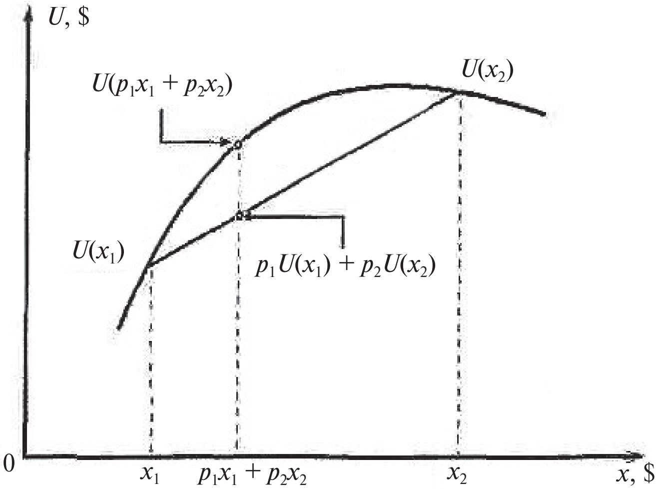

Рис. 6. Вогнутая функция полезности

Множители p_i можно интерпретировать как вероятности возникновения ситуаций $x^{(i)}$. В этом случае $U_A\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x^{(i)}\right)$ — полезность детерминированной величины $M(x)$: $x = \sum_{i=1}^{n} p_i x^{(i)}$, а $\sum_{i=1}^{n} p_i U_A(x^{(i)})$ — ожидаемая полезность случайной величины x

$$M\left(U_A(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i U_A(x^{(i)}). \tag{4}$$

Из формулы (3) следует неравенство

$$U_A(M(x)) > M(U_A(x)),$$

т. е. детерминированная величина $M(x)$ предпочтительнее случайной величины x. Более того, величина

$$\Phi_A = U_A(M(x)) - M(U_A(x))$$

или

$$\Phi_A = U_A\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x^{(i)}\right) - \sum_{i=1}^{n} p_i U_A(x^{(i)})$$

может трактоваться как премия, которую готов платить инвестор за то, чтобы застраховаться от случайного характера величины x и иметь дело с $M(x)$.

Иными словами, величина Φ_A — премия за риск: такую величину необходимо доплатить к случайной величине x, чтобы уравнять ее по степени полезности с детерминированным вариантом $M(x)$. Премия за риск — доплата к случайной величине, делающая ее одинаково привлекательной с детерминированной.

Назовем инвестора B нейтральным к риску, если случайная и детерминированная величины полезности с одинаковым математическим ожиданием для него одинаково привлекательны. Математически это выражается следующим образом:

$$U_B\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x^{(i)}\right) - \sum_{i=1}^{n} p_i U_B(x^{(i)}),$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1; \quad p_i \ge 0; \quad i = 1, \ldots, n.$$

Это — линейная функция полезности. Она описывает предпочтения нейтрального к риску лица, а также ситуации, в которых возврат, например, прибыли, линейно зависит от вложенных в проекты средств. Как известно, для линейной функции отрезок, соединяющий две точки графика, находится на графике функции.

Будем говорить, что лицо C склонно к риску, если для него детерминированная величина менее предпочтительна, чем случайная с тем же самым математическим ожиданием. Математически это выражается следующим образом:

$$U_C\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x^{(i)}\right) - \sum_{i=1}^{n} p_i U_C(x^{(i)}), \tag{5}$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1; \quad p_i \geq 0; \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Функция полезности $U_C(x)$, удовлетворяющая условиям (5), (6), называется выпуклой. Выпуклая функция полезности описывает предпочтения склонного к риску инвестора, а также ситуации, в которых возврат, например прибыль, растет сверхлинейно по отношению к вложениям x в проекты. Характерной чертой выпуклых функций является то, что отрезок, соединяющий две точки графика функции полезности, находится над графиком. Здесь случайная величина x с математическим ожиданием $M(x)$ предпочтительнее для лица C, чем детерминированная величина $M(x)$. Разность $\Phi_C = \sum_{i=1}^{n} p_i U_C(x^{(i)}) - U_C\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x^{(i)}\right)$ показывает, насколько больше приносит лицу C случайный вариант, чем детерминированный.

Предприятие, работая на сложных турбулентных рынках наукоемкой продукции, получает дополнительную прибыль, которая образуется в результате инновационной деятельности, направленной на производство новых товаров, товаров с новыми свойствами и качествами. Вместе с тем желание получить дополнительную прибыль влечет за собой и дополнительный риск, например обусловленный возможными ошибками в прогнозировании поведения потребителей. Дополнительная прибыль приводит к росту спроса на акции предприятия, ошибки — к его уменьшению.

Большинство людей избегает риска, поэтому реальная стоимость акции x часто меньше, чем стоимость дисконтированного потока дивидендов $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{c_i}{(1+q)^i}$ на величину, пропорциональную разбросу (неопределенности) дисконтированной стоимости дивидендов, $x = M\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{c_i}{(1+q)^i}\right) - \gamma\sigma\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{c_i}{(1+q)^i}\right)$. Здесь символ c_i означает дивиденды в момент i; q — процентную ставку (ставка дисконтирования). Вводя, как и ранее, приведенную стоимость потока платежей c_i $NPV_c = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{c_i}{(1+q)^i}$, для оценки реальной стоимости акций получаем выражение

$$x = \mathrm{NPV}_c - \gamma\left(\sigma(\mathrm{NPV}_c)\right),$$

где $\gamma\left(\sigma(\mathrm{NPV}_c)\right)$ — величина премии за риск в зависимости от степени неопределенности.

В качестве примера функции полезности рассмотрим чистую приведенную стоимость доходов от проекта по производству некоторого нового продукта, долл.:

Аргумент x (\$)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Функция полезности $U(x)$ (\$)	23	67	169	415	760	1101	1341	1431	1469	1500

Из рис. 7 видно, что функция полезности является выпуклой при $x < 450$; примерно линейной при $450 < x < 550$ и вогнутой при $x > 550$.

Сравним случайную величину, в которой x принимает с одинаковыми вероятностями 0,5 значения 200 и 400, с детерминированной величиной 300. Математическое ожидание случайной величины есть $0{,}5 \cdot 200 + 0{,}5 \cdot 400 = 300$. Ее оптимальная полезность равна $0{,}5 \cdot U(200) + 0{,}5 \cdot U(400) = 0{,}5 \cdot 71 + 0{,}5403 = 36$. В то же время полезность детерминированной величины в 300 такова: $U(300) = 179$.

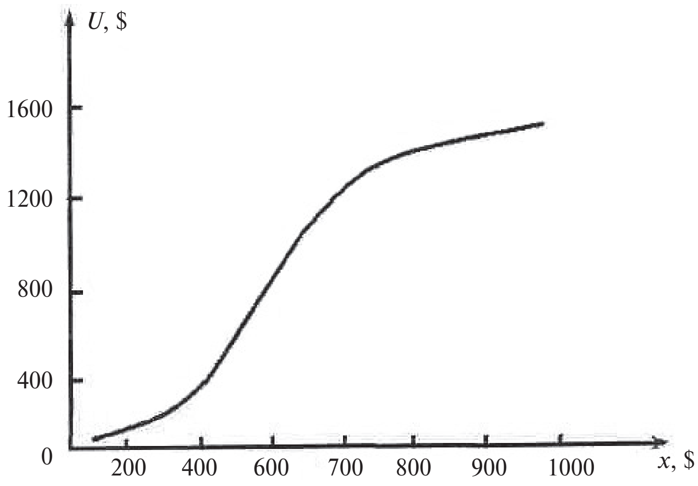

Рис. 7. Пример функции полезности

Предпочитая случайную величину детерминированной, инвестор выигрывает

$$272-179 = 93.$$

Рассмотрим функцию $U(x)$ на интервале $x > 550$. Сравним детерминированную величину $x = 800$ со случайной величиной, принимающей значение 600 с вероятностью 1/3 и значение 900 с вероятностью 2/3. Математическое ожидание случайной величины $\frac{1}{3} \cdot 600 + \frac{2}{3} \cdot 900 = 800$ такое же, как и ожидание детерминированной величины. В то же время полезность детерминированной величины $U(800) = 1429$.

6. Финансовый анализ в условиях риска и неопределенности

В процессе составления портфеля финансовых активов или портфеля мероприятий, направленных на получение финансовой прибыли, (проекты, заказы, инвестиции) обычно преследуется цель — получить максимальный доход при минимальном риске. Однако стремление получить высокий доход обычно сопряжено с высоким риском. Теория портфеля позволяет находить рациональные компромиссы между ожидаемым доходом и риском финансовых операций.

Начало формирования теории портфеля связывают с работой Г. Марковица [24], впоследствии награжденного Нобелевской премией за свои результаты в этой области. Названная теория была развита для портфелей ценных бумаг, поскольку вложения в ценные бумаги можно теоретически рассматривать как бесконечно делимые, что упрощает построения, а богатая статистика позволяет достаточно точно аппроксимировать вероятностные характеристики этих финансовых инструментов. Дальнейшее изложение также относится в основном к портфелю ценных бумаг.

Пусть рассматривается набор из N видов ценных бумаг, причем доходность (норма дохода) ценной бумаги i-го вида описывается *случайной величиной* r_i. Портфель мы ассоциируем с N-мерным вектором y, каждая компонента которого $y_i \geq 0$ соответствует доле содержания ценных бумаг i-го вида (в их денежном выражении) в портфеле $\sum_{i=1}^{N} y_i = 1$. Ожидаемая (средняя) доходность портфеля находится по формуле

$$M_p = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i \ , \tag{7}$$

где x_i — математическое ожидание (ожидаемое значение) доходности бумаги i-го вида, $x_i = M(r_i)$. Как правило, доходность измеряется в долях единицы или в процентах (числу 0,1 соответствует 10 %, (0,25–25) % и т. д.).

Ожидаемый разброс, отклонение доходности портфеля от среднего значения находится как среднеквадратичное отклонение σ_p:

$$\sigma_p = \sqrt{D[r_i]},$$

где $D[r_i]$ — дисперсия случайной величины r_i.

Можно указать другое выражение для вычисления σ_p^2

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} y_i y_j \sigma(r_i)\sigma(r_j)\mathrm{cor}(r_i, r_j). \tag{8}$$

где символ σ_p^2 означает дисперсию; символ $\mathrm{cor}(x_i, x_j)$ — коэффициент корреляции между величинами r_i и r_j. Если портфель состоит из некоррелированных между собой ценных бумаг, то для разброса доходности портфеля справедлива следующая формула: $\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2 \sigma_i^2(r_i)$.

Величина σ_p — среднеквадратичное, или стандартное отклонение — показывает меру отклонения доходности портфеля от ее среднего значения. Эта величина σ_p, называемая иногда *степенью неопределенности,* и трактуется в рамках излагаемого подхода как *риск портфеля,* она измеряется в тех же единицах, что и доходность.

Стоимость (полезность) некоторого финансового результата, который характеризуется случайной величиной, может быть оценена как ее среднее значение, скорректированное с учетом премии за риск. В связи с этим стоимость портфеля можно оценить с помощью параметров M_p и σ_p. Эти параметры являются ключевыми в теории портфеля.

Приведем пример расчета ожидаемой доходности и риска портфеля, состоящего из двух видов ценных бумаг. Предположим, что ожидаемые доходности x_A акций A и x_B акций B равны 20 и 40 % соответственно; $\sigma_A = 10\,\%$, $\sigma_B = 50\,\%$. Рассмотрим портфель, состоящий из $y \cdot 100\%$ акций *B* и $(1-y)\cdot 100\%$ акций *A*. Интерес представляет взаимосвязь доходности портфеля и риска при разных долях акций *A* и *B*, в частности, возможность минимизации риска путем рационального формирования портфеля. Результаты расчетов приведены в табл. 1 и на рис. 8. В каждой строке таблицы показаны значения риска портфеля σ_p, отвечающие соответствующей корреляции и доходности.

Ожидаемая доходность портфеля рассчитана по формуле (7) $\mu = M_p(y) = yM_B + (1-y)M_A = y \cdot 40 + (1-y)\cdot 20.$

Риск портфеля σ_p найден в соответствии с равенством (8)

$$\sigma_p = \sqrt{y^2\sigma_A^2 = (1-y)^2\sigma_B^2 + 2y(1-y)\sigma_A\sigma_B \mathrm{cor}(r_A, r_B)},$$

где $\mathrm{cor}(r_A, r_B)$ — корреляция доходностей акций *A* и *B*,

$$\mathrm{cor}(r_A, r_B) = \frac{\mathrm{cov}(r_A, r_B)}{\sigma_A\sigma_B}; \mathrm{cor}(r_A, r_B) = M\left[(r_A - x_A)(r_B - x_B)\right].$$

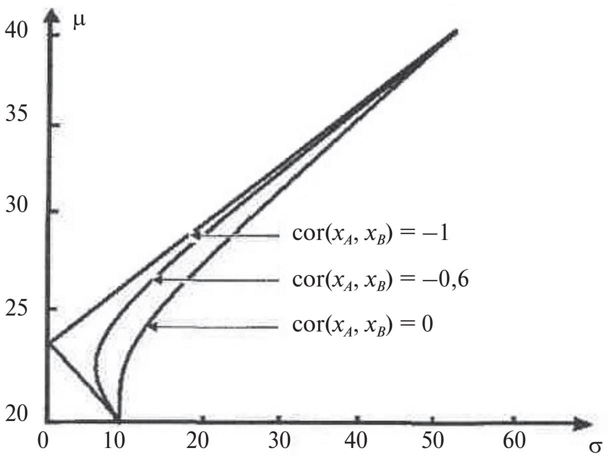

Рис. 8. Доходность портфеля в зависимости от риска и корреляции

Таблица 1

Стандартные отклонения доходности портфеля, долл.

cor (*A*, *B*)	Доля акций В, % (*y*)											
	0	10	17	20	30	40	50	60	70	80	90	100
	Доходность портфеля (M_p (*y*))											
	20	22	23,40	24	26	28	30	32	34	36	38	40
–1	10	4	0,20	2	8	14	20	26	32	38	44	50
–0,8	10	5,83	5,32	6	10,30	15,62	21,21	26,91	32,65	38,42	44,20	50
–0,6	10	7,21	7,52	8,25	12,17	17,09	22,36	27,78	33,29	38,83	44,41	50
–0,4	10	8,37	9,20	10	13,78	18,44	23,45	28,64	33,91	39,24	44,61	50
–0,2	10	9,38	10,63	11,49	15,23	19,70	24,49	29,46	34,53	39,65	44,81	50
0	10	10,30	11,88	12,81	16,55	20,88	25,50	30,24	35,13	40,05	45,01	50
0,2	10	14,14	13,01	14	17,78	22	26,46	31,05	35,72	40,45	45,21	50
0,4	10	11,92	14,06	15,10	18,92	23,07	27,39	31,81	36,30	40,84	45,41	50
0,6	10	12,65	15,03	16,12	20	24,08	28,28	32,56	36,88	41,23	45,61	50
0,8	10	13,34	15,94	17,09	21,02	25,06	29,15	33,29	37,44	41,62	45,80	50
1	10	14	16,80	18	22	26	30	34	38	42	46	50

Для оценки степени неопределенности дохода рассмотрим следующие варианты:

— вложение денег в безрисковые активы (облигации, банковский счет), имеющие доходность r_0;
— вложение денег в портфель из рисковых активов (например, акций), имеющий ожидаемую доходность x_p;
— вложение денег в портфель, содержащий одновременно и безрисковые активы, и рисковые.

Первая возможность является простой и в контексте проводимых построений не заслуживает отдельного анализа. В финансовой математике обычно предполагается, что существует возможность хранить деньги на банковском счете или в виде государственных ценных бумаг, причем доходность таких вложений задана и одна и та же для всех участников. Детальное рассмотрение вопросов, связанных с анализом ставок по кредитам и депозитам, а также доходности облигаций, выходит за рамки настоящего пособия.

При второй возможности исследуются портфели, имеющие минимальное значение риска σ_p при заданной доходности $x_p = \mu$. Такие портфели p^* определяются с помощью равенства $\sigma_{p^*}(\mu) = \min\{\sigma_p \mid x_p = \mu\}$, где минимум вычисляется по всем допустимым портфелям p. Для упрощения обозначений положим $\sigma^*(\mu) = \sigma_{p^*}(\mu)$.

В случае, когда дополнительных ограничений на допустимые портфели нет, задача нахождения зависимости $\sigma = \sigma^*(\mu)$ имеет явное решение [24], [17]. Ее можно сформулировать в форме задачи математического программирования:

найти

$$\min_y \sqrt{y^T V y} \tag{9}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = 1, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i x_i = \mu, \qquad (11)$$

где T означает операцию транспонирования вектора; V — матрица ковариаций, ее элементы $\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(r_i, r_j)$ — ковариации случайных величин r_i и r_j $(i, j = 1, 2, ..., N)$.

При некоторых дополнительных технических ограничениях задача (9)– (11) имеет решение следующего вида: $y_* = \varphi\mu + \psi$; $\sigma^*(\mu) = \sqrt{y_*^T V_*^T} = \sqrt{a\mu^2 + b\mu + c}$, где $a > 0$; $b^2 - 4ac < 0$; φ и ψ — фиксированные векторы, определяемые по параметрам задачи и не зависящие от μ.

График функции $\sigma^*(\mu)$ представляет собой гиперболу, которая, как и в случае двух акций, имеет вид, представленный на рис. 8–9. Верхняя ветвь гиперболы соответствует так называемым *эффективным,* или *недоминируемым,* портфелям. Каждый такой портфель характеризуется тем, что у любого портфеля с иными характеристиками риска и доходности либо доходность меньше, либо риск больше (либо то и другое одновременно).

Третья возможность составления портфеля и оценки риска — портфель из акций и безрисковых активов. Этот вариант постановки задачи был рассмотрен Дж. Тобином [25]. Здесь портфель ассоциируется уже с $(N + 1)$-мерным вектором $\hat{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y \end{pmatrix}$, первая компонента которого — доля капитала, вкладываемого по ставке r_0 без риска. Ожидаемая доходность такого портфеля имеет вид

$$x_p = y_0 r_0 + \sum_{i=1}^{N} y_i x_i, \qquad (12)$$

а выражение для риска формально остается тем же самым, $\sigma_{\hat{y}} = \sqrt{y^T V_y}$.

Задача на отыскание портфеля с минимальным риском $\sigma^*(\mu)$ при фиксированной ожидаемой доходности μ формулируется совершенно аналогично задаче (9)–(11), с необходимой модификацией соотношения (9) в соответствии с новым выражением для доходности (12).

Введение новой переменной y_o только упрощает решение задачи, и мы можем привести ответ полностью.

Зависимость $\sigma = \sigma^*(\mu)$ минимально возможного риска от доходности μ здесь имеет простой вид

$$\sigma = \frac{\mu - r_0}{g}, \tag{13}$$

где $g = \sqrt{(x - r_0 e)^T V^{-1}(x - r_0 e)}$. Здесь x — вектор, составленный из доходностей рисковых активов; e — вектор, у которого все компоненты равны 1.

Эффективные портфели определяются равенствами

$$y^* = \frac{\mu - r_0}{g^2} V^{-1}(x - r_0 e), \quad y_0^* = 1 - y^T e. \tag{14}$$

Таким образом, зависимость риска и доходности для эффективных портфелей линейная, а сами портфели обладают важным свойством: структура рисковой части y^* для всех таких портфелей одна и та же. Различие определяется лишь скалярным множителем $(\mu - r_0)$, который и характеризует склонность инвестора к риску: большим значениям μ соответствует и большая доходность и большой риск одновременно. Геометрически эффективным портфелям на плоскости (σ, μ) соответствует прямая линия (рис. 9).

Можно показать также, что один из эффективных портфелей в задаче Тобина является таковым и для задачи Марковица. Это портфель, содержащий нулевую безрисковую часть. Таким образом, прямая, соответствующая решениям задачи Тобина, является касательной к гиперболе, соответствующей эффективным портфелям чисто рисковых активов.

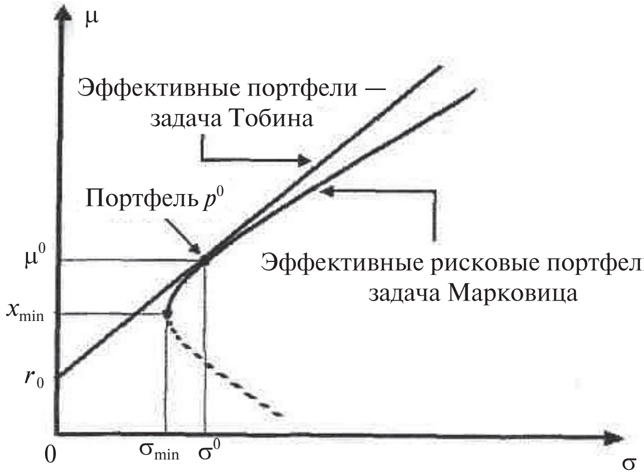

Рис. 9. Эффективные портфели рисковых активов
и с учетом возможности безрисковых вложений

Разность ($x_p - r_0$) между доходностью x_p рискового портфеля и доходностью безрисковых ценных бумаг r_0 называется **дополнительной доходностью**, или **премией за риск**. Эту величину можно использовать как для портфелей, составленных только для рисковых активов, так и для портфелей с безрисковой частью.

Рассмотрим отношение премии за риск ($x_p - r_0$) портфеля к степени неопределенности σ_p

$$\gamma_p = \frac{x_p - r_0}{\sigma_p}.$$

Эту величину называют *удельной премией за риск*, или коэффициентом Шарпа для данного портфеля. Можно показать, что портфель p^0 с максимальным коэффициентом Шарпа — это один из эффективных портфелей в задаче Марковица. Он находится как решение следующей задачи.

Найти

$$\gamma^0 = \max\{\gamma_p \mid p\},$$

где максимум снова вычисляется по всевозможным портфелям *p*.

Обозначим через σ^0 и μ^0 значения риска и доходности портфеля $p^{0.}$

В таком случае

$$\gamma^0 = \frac{\mu^0 - r^0}{\sigma^0} \quad (15)$$

и

$$\mu^0 = r_0 + \gamma^0 \sigma^0.$$

Портфель из рисковых активов с максимальным коэффициентом Шарпа иногда называют *оптимальным*. Оптимальность портфеля здесь состоит в том, что риск компенсируется по максимально возможной ставке доходности. Свойство оптимальности можно также пояснить следующим образом. Рассмотрим портфель, в котором долю y составляют безрисковые ценные бумаги с гарантированной доходностью r_0, а доля (1 — y) вложена в оптимальный портфель рисковых активов p^0. Ожидаемая доходность нового портфеля будет равна $x_p = yr_0 + (1-y)\mu^0$, а степень неопределенности (риск) —

$$\sigma_p = (1-y)\sigma^0. \quad (16)$$

Для нового портфеля отношение дополнительной доходности к степени неопределенности вычисляется в соответствии с равенством $\gamma_p = \dfrac{yr_0 + (1-y)\mu^0 - r_0}{(1-y)\sigma^0} = \dfrac{(1-y)\mu^0 - (1-y)r_0}{(1-y)\sigma^0}$, или

$$\gamma_p = \frac{\mu^0 - r_0}{\sigma^0} = \gamma^0.$$

Таким образом, оптимальное отношение дополнительной доходности к неопределенности является постоянным и не зависит от степени неопределенности. Последнее равенство отражает тот факт, что эффективным портфелям, содержащим рисковую и безрисковую часть (решения задачи Тобина), на плоскости риск–доходность соответствует прямая. Тангенс угла наклона этой прямой к оси σ равен γ^0, что свидетельствует о том, что данная прямая является касательной к кривой, отвечающей эффективным чисто рисковым портфелям, а оптимальный портфель — это тот самый портфель, который является эффективным одновременно и для задачи Марковица и для задачи Тобина. Заметим, что отрицательным y соответствует взятие денег в кредит под процент r_0 и приобретение на эти деньги бумаг рискового портфеля.

Конкретизируем ситуацию, придав параметрам числовые значения. Пусть имеются безрисковые облигации с доходностью 10 %; акции *A* и *B,* имеющие доходности $x_A = 15\%$ и $x_B = 30\%$ и риски $\sigma_A = 10\%$, $\sigma_B = 40\%$ соответственно. Для коэффициента корреляции положим cor $(A, B) = -0{,}6$.

Найдем оптимальный портфель из акций *A* и *B* и удельную премию за риск $\gamma^{0.}$ Акции *A* и *B* имеют отрицательный коэффициент корреляции. Кроме того, доходность акций *B* больше, чем доходность акций *A.* Будем начиная с портфеля, состоящего из 100 % акций *A,* постепенно увеличивать долю акций *B.* Результаты вычислений параметров портфеля приведены в табл. 2. Можно заметить, что доходность портфеля при этом увеличивается, а риск до определенного момента уменьшается. Последнее обстоятельство обусловлено отрицательной корреляцией доходностей активов.

Однако ввиду большого риска и высокой доходности акций *B* по сравнению с акциями *A*, рост доходности портфеля начиная с некоторой точки будет происходить за счет риска. По этим причинам кривая, отражающая связь доходности и риска портфеля, имеет загиб (рис. 10) в сторону оси ординат, соединяя точки $A(\sigma_A, x_A)$ и $B(\sigma_B, x_B)$. Данное обстоятельство, впрочем, вполне согласуется с общей теорией. Построенная кривая является частью гиперболы, портфелю из акций *A* отвечает точка на ее нижней ветви, а портфелю из акций *B* — на верхней.

Таблица 2

Величины доходности и риска портфеля из акций *A* и *B*, %

Показатель	Доля акций В в портфеле, %											
	0	10	17	20	25	30	40	50	60	70	80	100
Риск σ_p	10,00	7,33	6,88	7,16	8,14	9,60	13,30	17,46	21,54	26,31	20,84	40,00
Доходность x_p	15,00	16,50	17,55	18,00	18,75	19,50	21,00	22,50	24,00	25,50	27,00	30,00

Точка (σ^0, μ^0), максимизирующая $\dfrac{x_p - r_0}{\sigma_p}$, дает риск и доходность оптимального портфеля из акций *A* и *B*. Среди значений в табл. 2 выбираем оптимальные риск и доходность портфеля. Они равны соответственно 6,88 и 17,55 %. Оптимальный портфель состоит из 17 % акций *A* и 83 % акций *B* (см. рис. 10). Решение получено простым перебором и является приближенным, поэтому целесообразно округлить 6,88 до 7 %, а 17,55 до 18 %.

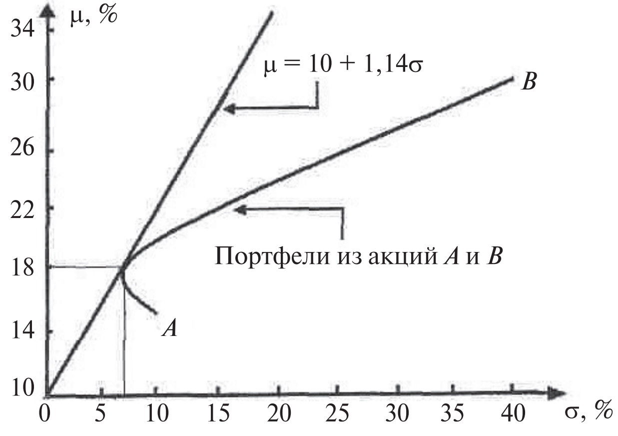

Рис. 10. Эффективные портфели двух рисковых активов

Риск портфеля, %, рассчитывается по формуле (13)

$$\sigma_p = \sqrt{(1-y)^2\sigma_A^2 + y^2\sigma_B^2 + 2y(1-y)\sigma_A\sigma_B \mathrm{cor}(r_A, r_B)};$$

$$\sigma_p = \sqrt{(1-y)^2 \cdot 0{,}16 + y^2 \cdot 0{,}01 + 2y(1-y)\cdot(-0{,}024)}.$$

Ожидаемая доходность портфеля, %, находится по формуле

$$x_p = (1-y)x_A + yx_B = (1-y)\cdot 15\% + y \cdot 30\%.$$

Нетрудно сосчитать и удельную премию за риск оптимального портфеля

$$\gamma^0 = \frac{18-10}{7} = 1{,}14\,.$$

Сформируем оптимальный портфель из акций и безрисковых облигаций, имеющий заданную доходность μ. Облигации дают безрисковый доход по ставке r_0. Доля облигаций y в новом портфеле вычисляется на основе формулы $\mu = yr_0 + (1-y)\mu^0$, где μ^0 и σ^0 — доходность и риск оптимального портфеля из акций *A* и *B*. Выделяя из этой формулы долю безрисковых облигаций *y,* получаем

$$y = \frac{\mu^0 - \mu}{\mu^0 - r_0}, \tag{17}$$

где μ — заданная доходность нового оптимального портфеля из акций и облигаций. Риск σ оптимального портфеля с доходностью μ определяется по формуле (13). При этом, если желаемая доходность μ больше, чем доходность оптимального рискового портфеля μ^0, то доля y, определяемая по формуле (17), становится отрицательной.

Сделаем небольшое отступление, касающееся допущения о том, что доли как рисковых, так и безрисковых активов могут принимать отрицательные значения. Отрицательные доли соответствуют так называемой короткой позиции по активам с такими долями.

Фактическое владение инвестором ценными бумагами называется **длинной позицией** (*long position*) по этим бумагам. Например, по фактически купленным акциям инвестор занимает длинную позицию (или сами бумаги находятся в длинной позиции). Контракт, по которому ценная бумага продана, и принятое обязательство предоставить ее в будущем к определенной дате по заранее оговоренной цене называется **короткой позицией** (*short position*). При этом в момент заключения сделки можно не иметь продаваемой бумаги.

Поясним смысл короткой позиции. Предположим, ожидается падение акций *D*, но у инвестора их нет. В этом случае можно заключить контракт о продаже определенного количества этих акций через определенное время по теперешней цене $S_{0,D}$. Тем самым инвестор займет короткую позицию по акциям *D*. Если прогнозы оправдаются и стоимость акций снизится до $S_{1,D} < S_{0,D}$, то акции покупают по фактической цене $S_{1,D}$ и продают по оговоренной в контракте цене $S_{0,D}$. Разница составляет доход от сделки.

Если доля y в формуле (17) отрицательна, облигации находятся в портфеле в короткой позиции: инвестор принял обязательство их продать в будущем, не имея их на руках, или же занял под безрисковый процент соответствующую сумму денег. На вырученные от продажи деньги увеличивается объем оптимального портфеля из акций *A* и *B*. В новом оптимальном портфеле p^0 на $-y$ долей облигаций в короткой позиции приходится $(1 - y)$ долей бумаг портфеля p^0.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Рассмотрим процедуру формирования эффективных портфелей, дающих 12 и 30 % дохода, на основе исходных данных предыдущего примера. Согласно этому примеру $\mu^0 = 17{,}55\,\%$, $\sigma^0 = 6{,}88\,\%$. Сформируем новый оптимальный портфель, содержащий безрисковую часть и имеющий доходность 12%. По формуле (17) этот портфель содержит $\frac{12}{18} = 66,66\ \%$. Следовательно, на ценные бумаги портфеля p^0 остается 100–66,66 = 33,34%. Эти соотношения определяют состав нового оптимального портфеля: 66,66% облигаций, $\frac{18-12}{18} \cdot 17 = 5,67\ \%$ акций B и $\frac{18-12}{18} \cdot (100-17) = 27,67\ \%$ акций A. Новый эффективный портфель p^*_{new} имеет риск, рассчитываемый по формуле (16) и равный 7 · (1–0,67) = 2,31%.

Теперь перейдем к другому эффективному портфелю p^{**}_{new}, у которого доходность 30%. Согласно формуле (17) на каждые $\frac{30-18}{18} = 0,67$ части обязательств по облигациям приходятся 1 + 0,67 = 1,67 части ценных бумаг портфеля p^0. Эти соотношения определяют состав нового портфеля: на каждые 0,67 части обязательств по облигациям приходится: $(1+0,67) \cdot 0,17 = 0,28$ части акций B; $(1\ +\ 0,67) \cdot 0,83\ =\ 1,39$ части акций A. Иначе говоря, на каждые 67 долл. обязательств по облигациям портфель имеет 28 долл. в акциях B и 139 долл. в акциях A. Риск нового портфеля p^{**}_{new} рассчитывается по формуле (16) с y = — 0,67: $7 \cdot (1+0,67) = 11,69\ \%$.

Доходность любого эффективного портфеля, составленного как из рисковых, так и безрисковых активов, определяется равенством

$$x_p = r_0 + \gamma^0 \sigma_p, \tag{18}$$

где r_0 — безрисковая процентная ставка; σ^0 — удельная премия за риск оптимального портфеля p^0; σ_p — степень неопределенности или риск портфеля.

Удельную премию за риск часто называют **индексом портфеля**. Эта величина характеризует портфель и может рассматриваться как аналог широко известных индексов, таких как индексы Доу Джонса, индекс *S&P*500, российский индекс РТС и др.

Модель ценообразования на рынке капитала CAPM. С конца шестидесятых годов прошлого века популярной становится инвестиционная теория, связанная с моделью оценки капитальных активов. Ее основы были заложены в работах У. Шарпа, Дж. Липтнера, Дж. Моссина [18]–[20]. Модель ценообразования на рынке капитала CAPM (Capital Assets Pricing Model) — модель, в основе которой лежат обсуждавшиеся выше выражения, относящиеся к выбору оптимального или эффективного портфеля.

Модель формулируется для *идеального конкурентного рынка*, обладающего следующими основными свойствами:

— все участники рынка обладают полной и одинаковой информацией о доходностях доступных активов;

— все активы абсолютно ликвидны, инвесторы имеют возможность купить и продать, занять и дать в долг любое количество активов, при этом для безрисковых активов действует единая процентная ставка r_0;

— все инвесторы формируют свои портфели в соответствии с теорией Марковица — Тобина, т. е. выбирают эффективные портфели из рисковых и безрисковых активов.

Среди перечисленных свойств идеального конкурентного рынка последнее условие выглядит самым ограничительным, из-за него модель CAPM не без основания подвергалась серьезной критике. Однако основные выводы, получаемые на основе этой модели, находят практическое применение и подтверждаются статистически.

В условиях идеального конкурентного рынка все инвесторы имеют одну и ту же структуру рисковой части портфеля, которая совпадает со структурой оптимального чисто рискового портфеля p^0. Отсюда простым логическим рассуждением выводится, что сам портфель p^0 не может быть ничем иным, как реально существующим рыночным портфелем, т. е. его доли — это доли всего обращающегося на рынке капитала, которые соответствуют суммарной стоимости акций определенного вида.

Последнее обстоятельство позволяет оценить характеристики риска и доходности портфеля p^0 без решения оптимизационной задачи, используя те или иные рыночные индексы. В качестве такого индекса берут, например, индекс $S\&P500$. Этот индекс содержит аккумулированную информацию об акциях пятиста крупнейших компаний и в значительной степени отражает поведение финансового рынка в целом.

Таким образом, оптимальный портфель p^0 для всех инвесторов один и тот же. В силу того что это — рыночный портфель, примем для него специальное обозначение — символ m, а характеристики его риска и доходности обозначим через σ_m и x_m соответственно.

Линия рынка капитала *Capital Market Line* — это прямая на плоскости (σ, μ), связывающая уровень риска σ с доходностью μ для эффективных портфелей в задаче Тобина. В нашем случае это — рыночный портфель и, как отмечалось выше, те портфели, у которых структура рисковой части совпадает со структурой рыночного портфеля.

Уравнение линии рынка капитала с учетом принятых обозначений получается путем преобразования формулы (13)

$$\mu = r_0 + \frac{x_m - r_0}{\sigma_m}\sigma.$$

Связь ожидаемой доходности отдельной бумаги с параметрами рыночного портфеля в равновесном состоянии рынка дает равенство

$$x_j = r_0 + \frac{x_m - r_0}{\sigma_m^2}\operatorname{cov}(r_j, r_m), \tag{19}$$

где $\operatorname{cov}(r_j, r_m)$ — коэффициент ковариации (линейной связи) доходностей рыночного портфеля и бумаги; r_j — случайная доходность ценной бумаги; r_m — случайная доходность рыночного портфеля.

Равенство (19) можно вывести путем преобразования выражения $\operatorname{cov}(r_j, r_m)$ с учетом явного представления доходности r_m.

Введем коэффициент λ — отношение премии за риск (дополнительной доходности рыночного портфеля по сравнению с доходностью безрисковых вложений) к его риску: $\lambda = \dfrac{x_m - r_0}{\sigma_m^2}$.

С учетом этого обозначения равенство (19) запишется в виде

$$x_j = r_0 + \lambda \operatorname{cov}(r_j, r_m). \quad (20)$$

Если теперь на горизонтальной оси отложить точки $\operatorname{cov}(r_j, r_m)$, отвечающие различным бумагам, то на плоскости $(\operatorname{cov}(r_j, r_m), x_j)$ соответствующие точки будут располагаться на одной прямой. Эта прямая называется **линией бумаг**, или *Security Market Line*. Уравнение (20) и соответствующий график отражают взаимосвязь доходности отдельной бумаги с доходностью рынка в целом.

Однако чаще используется другой способ представления указанной взаимосвязи. Для того чтобы его получить, перепишем равенство (20) в следующем виде: $x_j = r_0 + (x_m - r_0)\dfrac{\operatorname{cov}(r_j, r_m)}{\sigma_m^2}$.

Коэффициент $\dfrac{\operatorname{cov}(r_j, r_m)}{\sigma_m^2}$ является характеристикой ценной бумаги и обозначается символом $\beta: \beta_j = \dfrac{\operatorname{cov}(r_j, r_m)}{\sigma_m^2}$.

Равенство (20) принимает вид

$$x_j = r_0 + (x_m - r)\beta_j. \quad (21)$$

Соотношение (21) называется **основным уравнением модели** ***CAPM*** (рис. 11).

Коэффициент бета β связывает доходность ценной бумаги с доходностью рынка. Для рыночного портфеля $\beta_m = 1$, поэтому уравнение (21) преобразуется в тождество $x_m = x_m$.

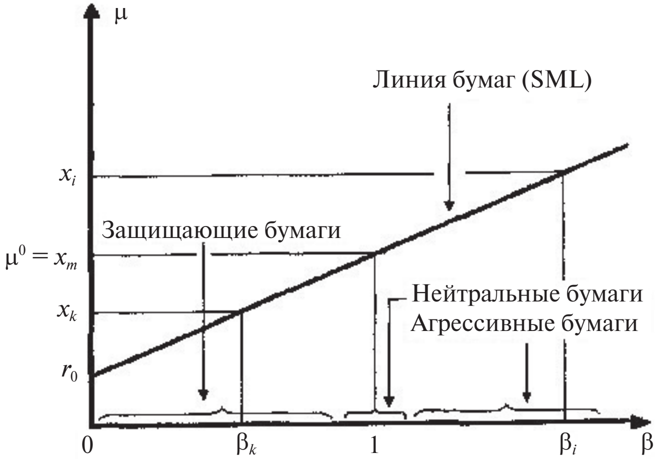

Рис. 11. Линия бумаг и бета-характеристика ценной бумаги

Параметр β показывает, насколько изменения доходности отдельной бумаги следуют за изменениями доходности рынка. Этот параметр широко известен не только специалистам-теоретикам, но и широкому кругу практиков, работающих на финансовом рынке. Статистические оценки бета для большинства ценных бумаг регулярно публикуются в финансовой прессе, существует даже специальное издание Beta Book, выпускаемое одним из ведущих финансовых издательств.

Есть и специальная терминология, относящаяся к β-характеристике риска ценной бумаги, а именно: бумаги с бета, близкими к единице, называются **нейтральными** (*neutral*). Изменения их доходностей следуют за движениями рынка, соответственно риск, связанный с ними, близок к риску работы на всем рынке.

Бумаги с большими бета называются **агрессивными** (*aggressive*), при вложении средств в такие бумаги инвестор получает больший выигрыш по сравнению с рыночным, если рынок растет, однако и больший проигрыш, если рынок падает. Соответственно риск при работе с такими бумагами больше.

И наконец, при малых положительных бета бумаги называются **безопасными** и даже **защищающими** (*defensive*). Их корреляция с рынком весьма мала, они полезны в случае ожидаемого падения рынка.

Систематический и несистематический риск. При формировании портфеля инвесторы стремятся достичь максимальной доходности при минимальном риске (неопределенности). Возникает вопрос: насколько риск ценной бумаги может быть уменьшен за счет ее включения в подходящий портфель? Различают систематический и несистематический риски. **Систематический риск** (*systematic risk*) — это риск, не поддающийся диверсификации, присущий всем ценным бумагам данного вида, например акциям, облигациям. **Несистематический риск** (*nonsystematic risk*) — риск, который может быть диверсифицирован путем включения бумаги в портфель с другими ценными бумагами того же вида. **Диверсификация** (*diversification*) — уменьшение риска путем составления портфеля и перераспределения риска.

Ответ на вопрос о количественных оценках систематического и несистематического риска дает модель CAPM и формулы (19)– (21), связывающие степень неопределенности оптимального портфеля с уровнем его доходности. В общем виде формула для определения минимально возможного систематического риска — систематической неопределенности — такова: $\sigma_j^s = \beta_j \sigma_m$, где σ_m — неопределенность оптимального рыночного портфеля с доходностью x_m. Несистематический, т. е. диверсифицируемый риск может быть найден из соотношения $\sigma_j^{ns} = \sigma_j - \beta_j \sigma_m$.

С помощью составления оптимального портфеля можно свести риск к $\beta_j\ \sigma_m$. Дальнейшее уменьшение риска достигается только при уменьшении уровня доходности портфеля. Геометрически несистематическому риску соответствует расстояние от точки бумаги на плоскости риск–доходность до прямой CML по горизонтали, а систематическому — далее от CML до оси ординат (рис. 12).

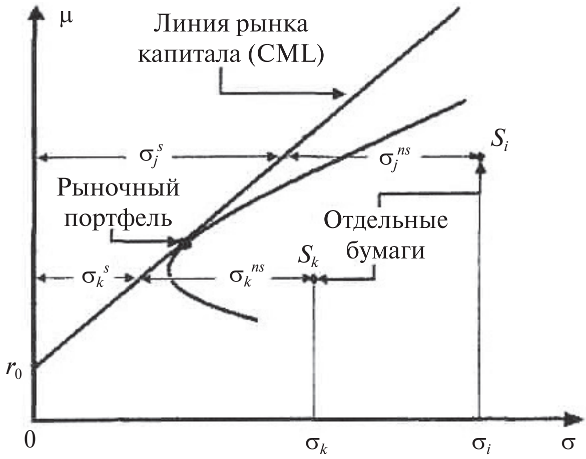

Рис. 12. Линия рынка и линия бумаг

Библиографический список

1. Альгин, А. П. Риск и его роль в общественной жизни / А. П. Альгин. М. : Мысль, 1989. 192 с.
2. Балабанов, И. Т. Риск-менеджмент/И. Т. Балабанов. М. : Финансы и статистика, 1996. 192 с.
3. Лапуста, М. Г. Риски в предпринимательской деятельности /М. Г. Лапуста, Л. Г. Шаршукова. М. : ИНФРА -М, 1998. 223 с.
4. Риски в современном бизнесе / П. Г. Грабовый [и др.]. М. : Алане, 1994. 200 с.
5. Чалый-Прилуцкий, В. А. Рынок и риск : методические материалы: (пособие для бизнесменов) по анализу оценки и управления риском / В. А. Чалый-Прилуцкий. М. : НИУР: Центр СИНТЕК, 1994. 234 с.
6. Arrow, K. J. Aspects of the theory of risk-bearing / K. J. Arrow. Helsinki : Yrjo Jahnssonin Saatio, 1965. 441 c.
7. Granville, J. E. New strategy of daily stock market for maximum profit / J. E. Granville. N. Y. : Prentice-Hall, 1976.
8. Therapeutic risk: Perception, measurement, management / D. Burley, W. H. W. Inman. Chichester : Wiley, 1988. P. 23–56.
9. Covello, V. T. Risk communication: Research and practice / V. T. Covello, D. von Winterfeldt, P. Slovic. N. Y. : Columbia Univ., School of Public Health, 1988. P. 57–98.
10. Lewis, H. W. Technological risk / H. W. Lewis. N. Y. : Norton, 1990. 353 p.
11. Linnerooth, J. The evaluation of life saving: A survey / J. Linnerooth. Laxenburg : IIASA, 1975. (Res. Report; 75–21).
12. Slovic, R The perception of risk / P. Slovic. London; Sterling: Earthscan Publ.Ltd, 2000. P. 1–12.
13. Гранатуров, В. М. Экономический риск: сущность, методы измерения, пути снижения / В. М. Гранатуров. М. : Дело и Сервис, 1999. 112 с.

14. Тренев, Н. Н. Управление финансами / Н. Н. Тренев. М. : Финансы и статистика, 2000. 496 с.
15. Transboundary risk management / J. Linnerooth-Bayer, R. E. Lofstedt, Sjostedt. Laxenburg : IIASA, 2001.
16. Bacskai, T. A gazdasigi kockasat es meresemeh medszerei / T. Bacskai. Budapest : Kozgazdasagi es Jogi Konyvkia-do, 1976. P. 1–25.
17. Шарп, У. Инвестиции / У. Шарп, Г. Дж. Александер, Дж. В. Вэйли. М. : ИНФРА-М, 1997. 1024 с.
18. Sharp, W. E. Capital Asset price: a theory of market equilibrium under conditions of risk / W. E. Sharp // J. Finance. 1964. 29 (3). P. 425–442.
19. Lintner, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets / J. Lintner // Rev. Econom.& Statistics. 1965. P. 13–27.
20. Mossin, J. Equilibrium in a capital asset market / J. Mossin // Econometrica. 1966. 34 (4). P. 768–783.
21. Roll, R. A critique of asset pricing theory test / R. Roll // J. Financ. Econom. 1977. P. 29.
22. Ross, S. A. The arbitrage theory of capital asset pricing / S. A. Ross // J. Economic Theory. 1976. P. 89.
23. Roll, R. A critical reexamination of the empirical evidence of the arbitrage pricing theory / R. Roll, S. A. Ross // J. Finance. 1984. P. 87.
24. Markowitz, H. Portfolio selection / H. Markowitz // J. Finance. 1952. Vol.7. P. 77–91.
25. Tobin, J. Liquidity preference as behavior towards risk / J. Tobin // Rev. Economic Stud. 1958. 25 p.

Оглавление

Учебное издание

Никонов Олег Игоревич,
Кругликов Сергей Владимирович,
Медведева Марина Александровна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Редактор И. В. Меркурьева
Верстка О. П. Игнатьевой

Подписано в печать 21.10.2015.. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Плоская печать. Гарнитура Newton.
Уч.-изд. л. 5,0. Усл. печ. л. 5,8. Тираж 80 экз.
Заказ 400

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8(343)375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8(343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8(343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru